Série de TD 7 : Propagation des ondes mécaniques dans les solides

OBJECTIFS

- L'équation d'onde dans les solides
- Les solutions du problème
- La notion des ondes stationnaires-conditions aux limites
- Mouvement force-modes propres-résonance
- Bilan énergétique
- Réflexion et transmission-conditions de continuité
- Quelques applications,

CE QU'IL FAUT RETENIR

- On définit une propagation d'onde dans un milieu matériel comme étant une perturbation évolutive du milieu sous l'action d'une excitation.
- Cette propagation dépend **des propriétés physiques du milieu ou l'onde se propage**
- **La corde vibrante est le modèle physique permettant de représenter les mouvements d'oscillation d'un fil tendu**. On supposera ici qu'il est tenu par ses deux extrémités, ce qui n'est pas toujours le cas (dans les pendules ou les fils à plomb, par exemple, l'extrémité du bas est libre).
- Étant tenue par ses deux extrémités, **les vibrations se réfléchissent à chaque extrémité**, il y a donc un **phénomène d'onde stationnaire**. On utilise dans ce cas **les conditions aux bords**.
- Ce modèle permet de comprendre les sons émis par les instruments à cordes, mais aussi les mouvements qui peuvent agiter les structures mécaniques comme les câbles, caténaires et élingues
- Lors du passage de **l'onde mécanique incidente du milieu 1 vers le milieu 2**, **il existe une onde transmise vers le milieu 2** et **une onde réfléchie vers le milieu 1**. **On utilise dans ce cas-là les conditions de continuités au point de séparation.**

Problème 1:

Soit une corde vibrant transversalement dans le plan Oxy. L'équation de mouvement est de forme $y = f(x,t)$. Soient T et μ la tension et la masse linéique de la corde à l'équilibre.

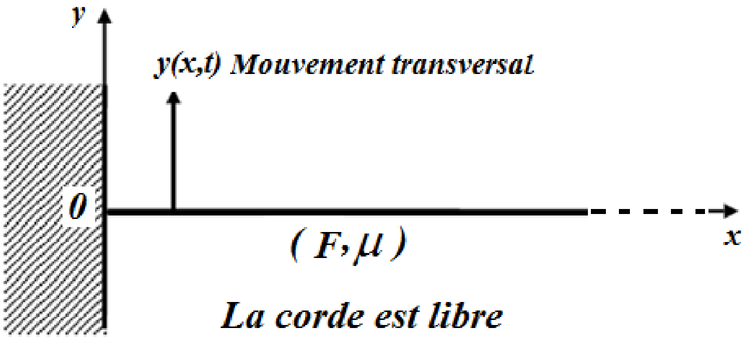

Figure 1.7 : La corde libre

- Ecrire l'équation de propagation de l'onde.
- En déduire la célérité V des oscillations.

On considère que l'ébranlement original est sinusoïdal.

- Déterminer les solutions de l'équation de propagation en utilisant la méthode des séparations des variables.

Maintenant la corde est fixée par les deux extrémités de distance a, lâchée sans vitesse initiale.

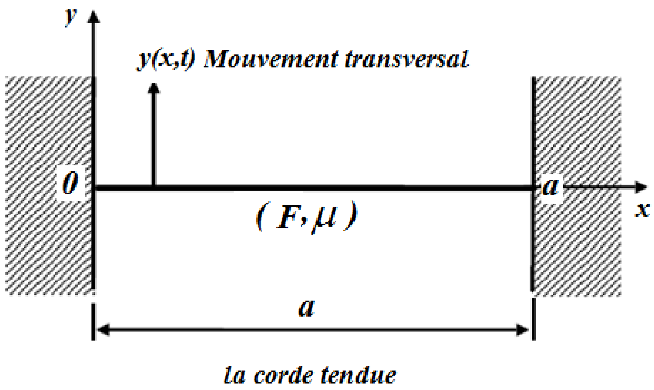

Figure 2.7: La corde tendue

- Déterminer la forme de la solution générale.
- Montrer que les fréquences de vibration de la corde sont multiples entier d'une fréquence fondamentale f_1.

Application numérique : Pour la troisième corde de la guitare de longueur $a=63cm$ en nylon, de masse volumique $\rho=1200kg/m^3$ et de section $S=0.42mm^2$.

- Calculer la tension de cette corde pour qu'elle puisse émettre le son fondamental $f_1=147Hz$ *(note ré).*
- La corde maintenant est écartée de la position d'équilibre à l'instant t=0, telle que représentée par la figure 3.7 et lâchée sans vitesse initiale:

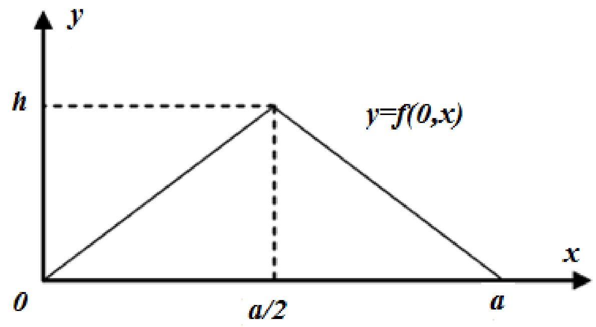

Figure 3.7 : La corde écartée de sa position initiale

Déterminer la solution générale de l'équation de propagation.

Problème 2 :

Une corde vibrante homogène et sans raideur, de masse linéique μ, tendue par une force de tension d'intensité F constante. La corde au repos est horizontale et matérialisée par l'axe Ox.

Au cours de la propagation d'une onde, le point M de la corde, d'abscisse x au repos subit le déplacement transversal $y(x, t)$ à l'instant t.

On néglige l'influence de la pesanteur sur la corde, mais on tient compte de la force d'amortissement dirigée suivant l'axe Ox, $Ox \perp Oy$ et de valeur algébrique **:** $-bV(x,t)$ par unité de longueur (avec b>0), où $V(x,t)=\dfrac{\partial y}{\partial t}$ est la vitesse transversale de l'élément de la corde d'abscisse *x* à l'instant *t*.

- Etablir l'équation aux dérivées partielles du déplacement *y(x, t).*

On définit k le vecteur d'onde de cette onde. On supposera l'amortissement faible **(**$b \ll \mu\omega$).

- Etablir la relation de dispersion sous la forme :

$$k(\omega)=\omega\frac{[1-jg(\omega)]}{c}$$

- Exprimer les coefficients *g* et *c* en fonction des données *F*, μ *et b*.
- En déduire l'équation de l'onde *y(x, t)*. Que peut-on dire sur *y(x, t)* ?

On définit l'impédance mécanique complexe

$$\tilde{Z}=\frac{T_y}{V(x,t)}$$

Où T_y désigne la projection sur Oy de la tension de la corde en *M(x).*

- Exprimer l'impédance mécanique complexe $\tilde{Z}$ de la corde en fonction de F, μ, b. et ω.

Problème 3 :

Deux cordes, de masses linéiques μ_1 et μ_2, sont attachées à la jonction *O* pour former une longue corde tendue horizontalement suivant l'axe Ox avec une force de tension d'intensité *F*. On choisit l'abscisse *x=0* à la jonction O des deux cordes.

Une onde incidente sinusoïdale transversale de faible amplitude a_i et venant de la gauche (région *x<0*) de la forme :

$$y_i(x,t)=a_i\cos(\omega t-k_1x)$$

A la jonction O il y a une onde réfléchie dans la région $x<0$ et une onde transmise vers la région $x>0$. On définit k_1 et k_2 respectivement comme étant les vecteurs d'ondes dans les régions $x<0$ et $x>0$:

- Exprimer les deux équations de continuité au niveau de la jonction O deux relations qui lient les amplitudes a_i, a_t, a_r et le rapport $\frac{k_1}{k_2}$.
- En déduire les coefficients de réflexion $R = \frac{a_r}{a_i}$ et de transmission $T = \frac{a_t}{a_i}$ pour l'amplitude en fonction de k_1 et k_2, puis en fonction de μ_1 et μ_2. Commenter.
- ***Application numérique :*** On attache en O un fil d'acier(1) de diamètre $d_1=2\ mm$ et un fil d'acier *(2)* de diamètre $d_2=1.2mm$.
  Calculer, pour l'onde qui se propage du fil (1) vers le fil (2), les coefficients R et T.

Problème 4:

Soit $\boldsymbol{U}$ une onde mécanique longitudinale se propageant suivant l'axe Ox dans un barreau cylindrique homogène indéformable de masse volumique ρ , de module de Young $\boldsymbol{E}$ de longueur l et de section droite $\boldsymbol{S}$.

- Ecrire l'équation de propagation d'Alembert.
- Déterminer la solution $\boldsymbol{U(x, t)}$ de l'onde.
- Déterminer l'impédance mécanique $\boldsymbol{Z(x)}$ à la position x. En déduire l'impédance caractéristique du milieu $\boldsymbol{Z_c}$.

Problème 5 :

On se propose d'étudier la propagation d'une onde transversale à la surface S d'une membrane tendue. On considère une membrane rectangulaire dans l'espace plan $Oxyz$ et dont les axes sont Ox, Oy, Oz . Soit un élément ds dont les cotes sont soumises a des tensions linéaires τ , comme le montre la figure 4.7 comme suit **:**

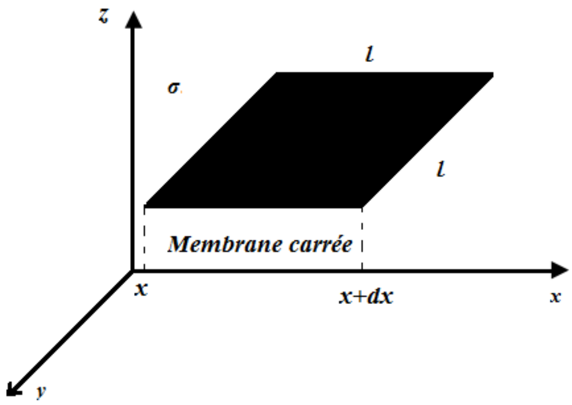

Figure 4.7 : Mouvement transversal de la membrane

- Etablir l'équation de propagation de l'onde sachant que la membrane a une masse surfacique σ.
- Trouver les solutions de l'équation différentielle par la méthode des séparations des variables.
- En déduire la forme de la solution générale de l'équation de propagation.