Série de TD 5 : Mouvement oscillatoire à plusieurs Degrés de liberté

OBJECTIFS :

- Les équations différentielles d'un mouvement **couplé**
- Les différentes solutions du problème
- La notion des **modes propres**
- Le phénomène **du battement**
- Le mouvement force à plusieurs degrés de liberté
- Notions de « **Résonance et Antirésonance** »
- Quelques applications

CE QU'IL FAUT RETENIR

- Les systèmes **à plusieurs degrés de liberté** nécessitent **plusieurs coordonnées indépendantes**
- Le **nombre de degré de liberté** détermine **le nombre des équations différentielles** ainsi que les **modes propres du mouvement**.
- Il existe **deux types de systèmes**
  - Systèmes à plusieurs *sous-systèmes découplés*
    Les solutions sont découplées
  - *Systèmes couplés* par plusieurs sous systèmes
    Les solutions sont une combinaison par plusieurs modes propres
- ***« Les battements »*** sont régis par deux mouvements oscillatoires harmoniques de même direction se superposent,
- *Le phénomène de « **Résonance** »* se manifeste lorsque la réponse d'un système est au maximum a excitation constante
- *Le phénomène « **d'Antirésonance** »* se manifeste lorsque la réponse d'un système est au minimum a excitation constante

Problème 1:

A-Modes propres : Deux pendules simples identiques O_1A_1 et O_2A_2 de masse m et de longueur l, sont couplés par un ressort horizontal de raideur k qui relie les deux masses A_1 et A_2, **figure** 1.5. A l'équilibre, le ressort horizontal a sa longueur naturelle l_0 tel que $l_0 = O_1O_2$.

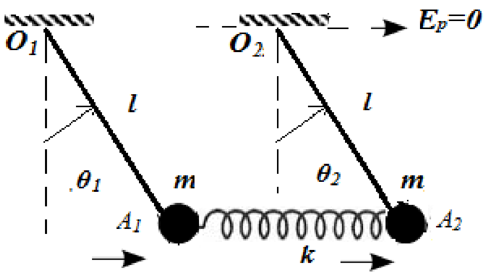

Figure 1.5 : Couplage de deux pendules identiques par un ressort

Les deux pendules sont repérés, à l'instant t, par leurs élongations angulaires $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ supposées petites par rapport à leur position verticale d'équilibre. On désignera g l'accélération de la pesanteur.

- Déterminer le Lagrangien du système.
- Etablir les équations différentielles couplées vérifiées par les deux élongations angulaires instantanées $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$
- Exprimer en fonction de g, k, l *et* m, les deux pulsations propres ω_{1p} et ω_{2p} de ce système.
- ***Applications numériques*** : Calculer ω_{1p} et ω_{2p}
  Sachant que: $m= 100g$; $l= 80cm$; $k=9.2\ N/m$ et $g= 9.8m/s^2$.
- On lâche sans vitesses initiales le système à l'instant $t=0$ dans les conditions initiales suivantes : $\theta_1=\theta_0$ et $\theta_2=0$
- En déduire les lois d'évolution. $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ aux instants t >0. Quel est le phénomène étudié.

B-Modes forcés : La masse *A* est soumise à une force excitatrice horizontale de forme : $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$

- Ecrire les nouvelles équations différentielles couplées en $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.
- Exprimer les relations complexes qui concernent les vitesses linéaires V_1 et V_2 des points A_1 et A_2 en régime forcé.
- En déduire l'impédance d'entrée complexe $\overline{Z}_e = \dfrac{F}{\tilde{V}_1}$.

Problème 2

On modélise le mouvement d'une molécule ***triatomique (A-B-A)*** par a un système mécanique constitué par trois masses couplées par deux ressorts identiques de constante de raideur *k* représenté dans la figure 2.5 comme suit:

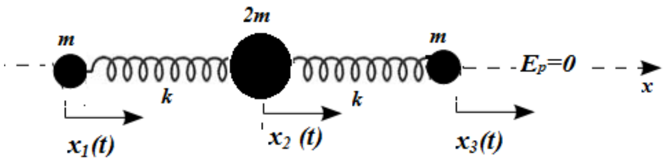

Figure 2.5 : Mouvement oscillatoire à trois degrés de liberté

- Etablir le Lagrangien du système.
- Déterminer les équations différentielles du mouvement.
- En déduire les pulsations propres ainsi que la nature du mouvement.
- Donner la matrice de passage. Donner les solutions générales.

Problème 3 :

Partie A : Soit un pendule de masse *m* et de longueur *l* pivote autour de *M* qui glisse sans frottement sur le plan horizontal, comme le montre la figure 3.5 comme suit :

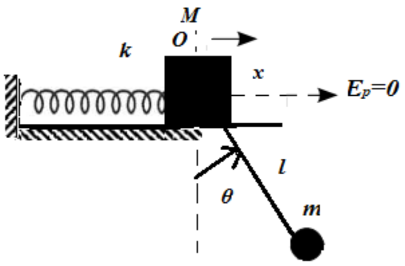

Figure 3.5 : Couplage pendule simple avec un oscillateur harmonique

- Déterminer le Lagrangien du système ?
- En déduire les équations différentielles de mouvements.
- Déterminer les pulsations propres du système.
- Trouver le rapport d'amplitude dans les modes normaux.
- Donner les solutions générales lorsque : *M* tend vers l'infini et *l* tend vers *0*. Discuter.

Partie B : On impose au point *s* un mouvement sinusoïdal de type : $x_s = a\sin\Omega t$

Comme le montre la figure 4.5:

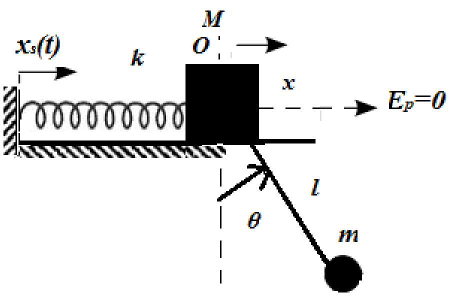

Figure 4.5 : Mouvement couplé forcé « Pendule-Ressort »

- En déduire les nouvelles équations du mouvement.
- Donner le module des amplitudes.
- Quelle est la nature du mouvement.

Problème 4 :

Partie A : ***On*** considère une barre homogène de masse *M*, de longueur *l*, moment d'inertie $J_g = \frac{1}{12}Ml^2$, mobile d'un axe fixe à une de ses extrémités *O*. A l'autre extrémité A est fixé un ressort de raideur k_1 comme la montre la figure 5.5:

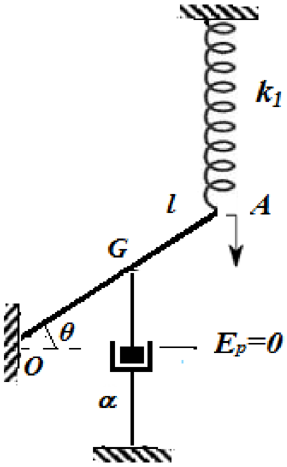

Figure 5.5 : Mouvement amorti

De plus le système est amorti par le biais d'un amortisseur au lieu de la barre *G* dont le coefficient de frottement α. En position d'équilibre la barre est horizontale.

- Dans le cas des petites oscillations : Donner le Lagrangien du système.
- Etablir l'équation différentielle du mouvement.
- Donner le cas d'un faible amortissement l'expression de la solution générale $\theta(t)$ avec **les conditions initiales** suivantes: $\theta(t=0)=0$ et $\dot{\theta}(t=0)=\dot{\theta}_0$.

Partie B :

On enlève l'amortisseur du milieu *G* de la barre, et on place un ressort k_2 et une masse *m*, représenté dans la figure 6.5:

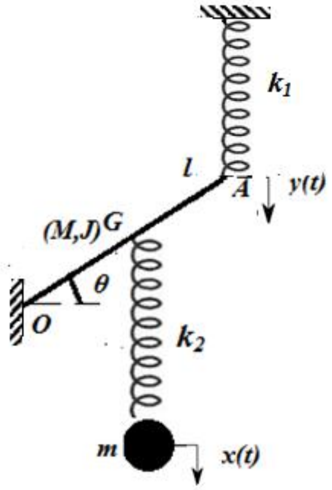

Figure 6.5 : Mouvement oscillatoire à deux degrés de liberté

- Ecrire le Lagrangien du système.
- On pose $k_1=k$, $k_2=4k$ et $M=3m$.

  Etablir les équations différentielles du mouvement. En déduire la nature du mouvement.
- Donner les pulsations propres.
- Déterminer les rapports d'amplitudes aux modes propres du système.
- Donner les solutions générales.
- En déduire la matrice de passage.