Série de TD 4 : Mouvement oscillatoire forcé à 1 Degré de liberté

OBJECTIFS :

- L'équation différentielle d'un mouvement force
- Les différentes solutions du problème
- Le phénomène de résonance
- Quelques applications

CE QU'IL FAUT RETENIR

- L'oscillation forcée est régie par l'équation différentielle :

$$\ddot{q}(t) + 2\xi\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = h(t)$$

- Il existe **deux régimes** :
- ***Le régime transitoire*** *:*
    - *La solution totale du système est :*

    $$q(t) = q_g(t) + q_p(t)$$

    - Où $q_g(t)$ et $q_p(t)$ représentent respectivement la solution générale la solution particulière
- ***Le régime permanent :***
    - Caractérisé par le phénomène : **« La Résonance** »
    la solution du système est de la forme :

    $$q(t) = q_p(t)$$

- Il faut signaler que **la force extérieure absorbe les pertes du système due aux forces de frottements**.

Problème 1:

Soit un immeuble *A* modélisé par le système physique représenté par une masse *m* et un ressort de raideur *k* subit à un mouvement sismique sinusoïdal d'amplitude *a* de forme $x_s = a\cos\omega t$ représenté dans la figure 1.4 comme suit:

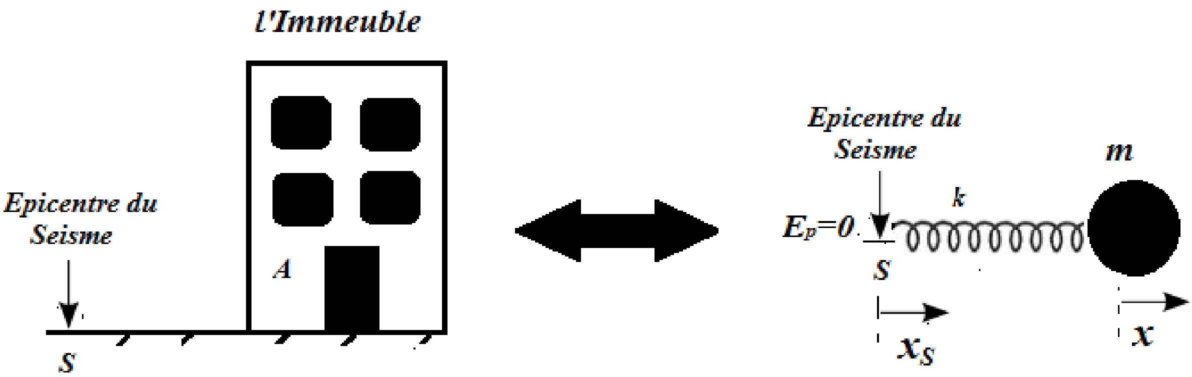

Figure 1.4 : Modélisation d'un mouvement sismique

- Définir l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.
- En déduire le Lagrangien du système.
- Etablir l'équation différentielle du mouvement.
- Déterminer l'amplitude de la réponse du système. Justifier le résultat.

Problème 2:

Soit le circuit forme par l'association parallèle *R*, L_{ind}, C_{ap} et alimente par une source de courant sinusoïdale délivrant un courant d'intensité $i(t) = i_0\sqrt{2}\cos\omega t$ comme le montre la figure 2.4 ci-dessous.

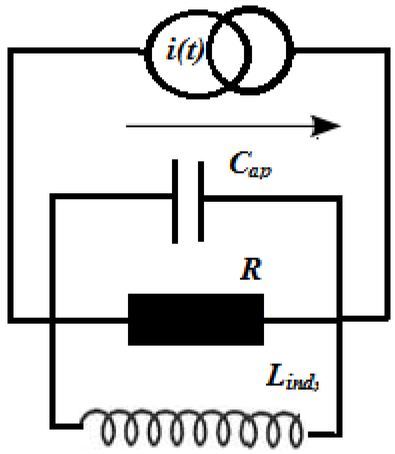

Figure 2.4 : Circuit R.L.C en parallèle

- Exprimer la tension complexe u aux bornes de l'association parallèle en fonction de ω, i_0, et des paramètres du circuit.

  On pose les constantes suivantes :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_{ind}C_{ap}}\ ,\ x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

  Et on définit le facteur de qualité du circuit comme suit :

$$Q = RC_{ap}\omega_0$$

- Exprimer le module de la tension u aux bornes de l'association parallèle en fonction de R, i_0, Q et x.
- Montrer que u passe par un maximum u_{max} pour une valeur de x à déterminer.
- Représenter sommairement $f(x) = \dfrac{u}{u_{max}}$ en fonction de x.
- Que retrouve t- on ?
- Calculer la largeur de la bande passante.

Problème 3:

Lorsqu'un moteur électrique fonctionne, il présente des vibrations naturelles qu'il est nécessaire d'amortir pour éviter de les transmettre à son châssis. On prévoit donc un système de suspension.

Le moteur est assimile au point matériel m de masse *m* pouvant se déplacer parallèlement à l'axe vertical *Oz*. La suspension le reliant au châssis est modélisée par un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur *k* en parallèle avec un amortisseur exerçant sur le moteur une force de freinage $\vec{f}_{fr} = -\alpha \dot{z} \vec{u}_z$

Le châssis reste fixe dans un référencier galiléen et on note le champ de pesanteur $\vec{g}$

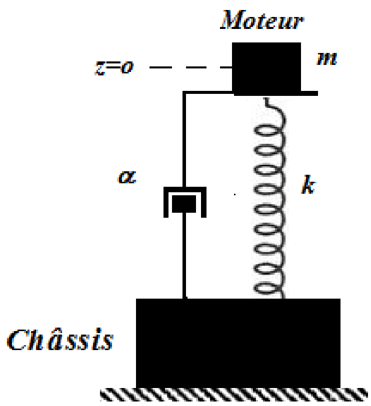

Figure 3.4 : Etude les vibrations d'un moteur

Mode A :

Le moteur ne fonctionne pas et il est immobile.

- Déterminer dans ce cas la longueur *l* du ressort. On prend la référence *z=0* au point *m*.

Mode B :

Le moteur étant toujours arrêté, on l'écarte de sa position d'équilibre et puis on le laisse évoluer librement.

- Déterminer le Lagrangien du système.
- Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par *z(t)*.

On pose les constantes suivantes :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ et } \nu = \frac{\alpha}{2m\omega_0}$$

- Donner la forme de la solution générale $z(t)$ en fonction des paramètres ν *et* ω_0, on suppose que $\nu<1$.
- Comment appelle-t-on ce régime ?
- Écrire l'expression de l'énergie totale E_T en fonction de $z(t)$ et $\frac{dz(t)}{dt}$
- Que vaut-t-il la valeur de l'expression $\frac{dE_T}{dt}$. Le système est-il conservatif ?

Mode C :

Le moteur fonctionne, et tout se passe comme s'il apparaissait une force supplémentaire de forme : $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 \cos \omega t \vec{u}_z$

- Établir la nouvelle équation du mouvement vérifiée par $z(t)$
- En régime permanent, on cherche des solutions de la forme

  $$z(t) = z_0 \cos(\omega t + \varphi) et V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$

  - Donner l'expression de la grandeur $V = V_0 e^{i\phi}$
- Exprimer l'amplitude V_0 en fonction de ω et des paramètres ν, ω_0 et F_0/m.
- Donner l'allure de $V_0(\omega)$.
- ***Application numérique:*** la pulsation ω vaut 628 rad/s, le moteur a une masse $m=10kg$. On dispose de deux ressorts de raideurs $k_1=4\ 10^6 n/m$ et $k_2=10^6 n/m$. lequel faut-il choisir pour réaliser la suspension ?

Corrigé type du TD 4 : Mouvement oscillatoire forcé à 1 Degré de liberté

Problème 1:

- Le Lagrangien du système :

L'énergie cinétique s'écrit:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

L'énergie potentielle s'exprime:

$$E_p = \frac{1}{2}k(x - x_s)^2$$

Le Lagrangien du système s'écrit alors :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(x - x_s)^2$$

- L'équation différentielle est de forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum \overline{F}_{ext} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{a}{m}\cos \omega t$$

D'où :

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = R_e\left\{\frac{a}{m}e^{j\omega t}\right\}$$

$$\text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

- La solution de cette équation est de la forme :

$$x(t) = x_p(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi)}$$

En remplaçant dans l'équation de mouvement, on détermine l'amplitude de la réponse comme suit :

$$A(\omega) = \frac{\frac{a}{m}}{\left|\omega^2 - \omega_0^2\right|}$$

Le système présente une singularité au point $\omega = \omega_0$ comme le montre la figure 4.4:

$$A(\omega) \to \infty \quad lorsque \quad \omega \to \omega_0$$

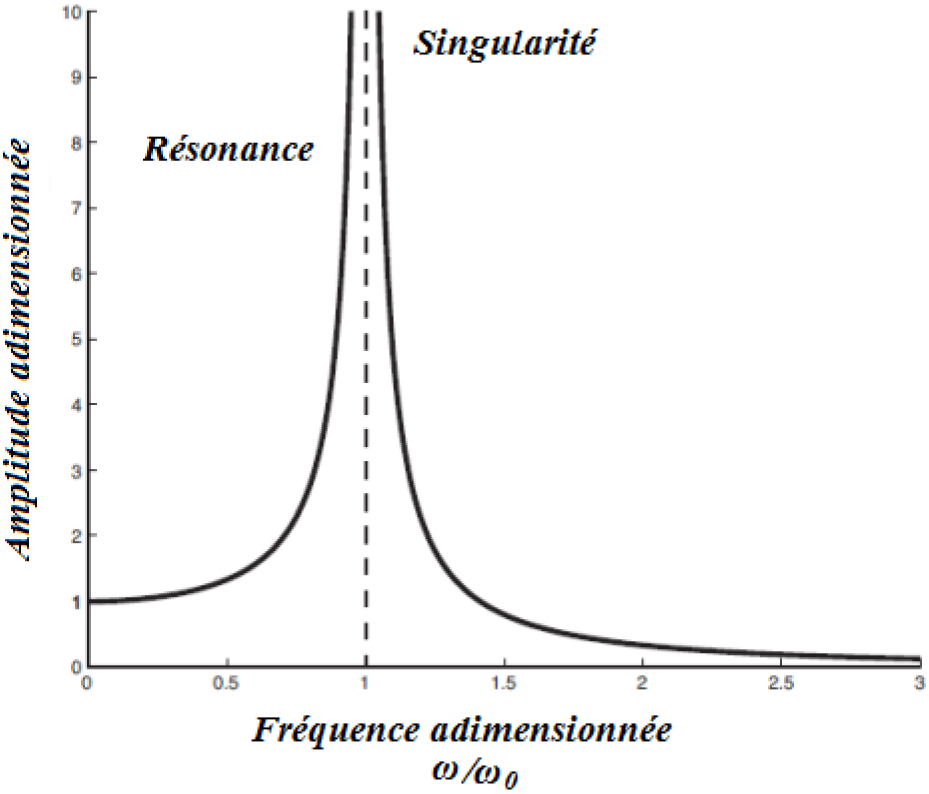

Figure 4.4 : Phénomène de résonance
Singularité à la fréquence propre du système

Problème 2 :

- La tension complexe u du système est de forme :

$$u(t) = \tilde{Z}_{équi} i(t)$$

D'ou le courant est égale a **:**

$$i(t) = \frac{u(t)}{\tilde{Z}_{équi}}$$

Soit $\tilde{Z}_{équi}$ l'impédance complexe équivalente du circuit R.L.C en parallèle qui se calcule comme suit :

Avec :

$$\frac{1}{\tilde{Z}_{équi}} = \frac{1}{R} + jC_{ap}\omega + \frac{1}{jL_{ind}\omega}$$

D'ou la tension est égale à :

$$d'où \quad u(t) = \frac{Ri(t)}{1 + jR(C_{ap}\omega - \frac{1}{L_{ind}\omega})}$$

- Le module de la tension s'écrit alors :

$$|u(t)| = \frac{Ri_0\sqrt{2}}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$$

- On constate que :

$$u = u_{max} = Ri_0\sqrt{2} \quad lorsque \quad x = 1$$

- Le schéma de la fonction $f(x) = \frac{u}{u_{max}}$ est représenté dans la figure 9.4 comme suit :

$$f(x) = \frac{u}{u_{max}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$$

On obtient la résonnance lorsque $x=1$, c'est-à-dire :

$$f(x) = 1 \quad si \quad x = 1 \Rightarrow \quad Résonance$$

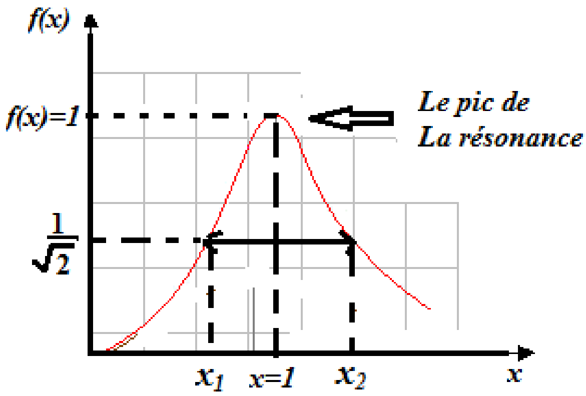

Figure 5.4 : Phénomène de résonnance en tension

Dans le circuit R.L.C en parallèle

- La bande passante $\Delta\omega$ se calcule comme suit :

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

En résolvant l'équation paramétrique suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2(x-\frac{1}{x})^2}}$$

Après transformation on obtient la largeur réelle de la bande passante devient alors:

$$\Delta\omega = \omega_0 \Delta x \quad d'où \quad \Delta\omega = \frac{1}{RC}$$

Problème 3:

Mode A :

Le système est en équilibre

- La longueur du ressort :

$$\sum_{i\geq 1} \vec{F}_i = \vec{O} \quad \Rightarrow l = l_0 - \frac{mg}{k}$$

Mode B :

Le système est en mouvement amorti

- Le Lagrangien du système :

$$L = \frac{1}{2} m\dot{z}^2 - \frac{1}{2} kz^2$$

- L'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \qquad m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = 0$$

D'ou :

$$\ddot{z} + 2\nu\omega_0 \dot{z} + \omega_0^2 z = 0 \qquad Avec \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \nu = \frac{\alpha}{2m\omega_0}$$

- La résolution de l'équation du mouvement :

$$r^2 + 2\nu\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$
$$\Delta' = (\nu\omega_0)^2 - \omega_0^2 = -\omega_0^2(1-\nu) = j^2\varpi^2 \prec 0 \quad \nu \prec 1$$

- ❖ Le système a un mouvement oscillatoire amorti.

- La solution est de la forme :

$$z(t) = Ae^{-\nu\omega_0 t}\cos(\varpi t + \varphi)$$

- l'énergie totale du système s'écrit sous la forme:

$$E_T(t) = \frac{1}{2}m(\frac{dz}{dt})^2 + \frac{1}{2}kz^2$$

A partir de l'équation du mouvement, on obtient **:**

$$\dot{z}[m\ddot{z} + kz = -\alpha\dot{z}] \quad \Rightarrow \frac{dE_T(t)}{dt} = -\alpha\dot{z}^2 \prec 0$$

- Le système n'est pas conservatif car il y a déperdition de l'énergie totale. Cette diminution est due au travail des forces de frottement.

Mode C :

Le système est en mouvement forcé

- L'équation du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = F(t)$$

D'où :

$$\ddot{z} + 2\nu\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F(t)}{m}$$

Avec :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \nu = \frac{\alpha}{2m\omega_0}$$

- La solution de l'équation différentielle est :

$$\dot{z}(t) = V(t) = V_0\cos(\omega t + \phi) = R_e V_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$Avec \quad z(t) = \frac{\dot{z}(t)}{j\omega} \quad \ddot{z}(t) = j\omega\dot{z}(t)$$

- En remplaçant dans l'équation du mouvement on obtient alors :

$$V(t) = \frac{\frac{F_0}{m}}{2\nu\omega_0 + j\omega(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})}e^{j\omega t}$$

- Le module de la vitesse est de la forme :

$$V_0(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(2\nu\omega_0)^2 + \omega^2(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2}}$$

- L'étude des variations du module de la vitesse :

$$\frac{dV_0(\omega)}{d\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} V_0(\omega) = V_{max} \\ \omega = \omega_r = \omega_0 \end{array}$$

  - Pour cette pulsation on a le phénomène de résonance.
  - L'allure de la courbe $V_0(\omega)$ est de forme :

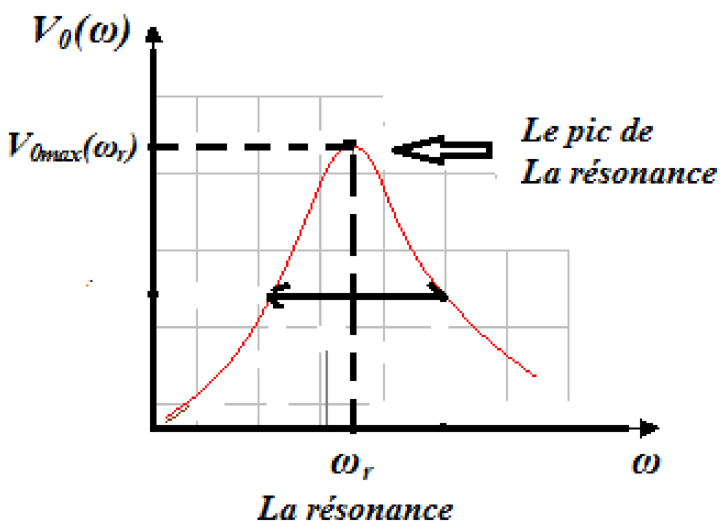

Figure 6.4 : Phénomène de la résonance du moteur

- ***Application numérique*** :

$$\omega_{r1} = \omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \quad V_{max1}(\omega_{01}) = \frac{F_0}{2m\nu\omega_{01}}$$
$$\omega_{r2} = \omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m}} \quad V_{max2}(\omega_{02}) = \frac{F_0}{2m\nu\omega_{02}} \quad \Rightarrow \quad \frac{V(\omega_{02})}{V(\omega_{01})} = \frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}$$