Série de TD 3 : Mouvement oscillatoire amorti à 1 Degré de liberté

OBJECTIFS :

- L'équation différentielle d'un mouvement amorti
- Les différentes solutions du problème
- L'aspect énergétique

CE QU'IL FAUT RETENIR:

- L'oscillation amortie est régie par l'équation différentielle

$$\ddot{q}(t) + 2\xi \dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$$

- Il existe 3 **types de solutions** :
- ***Cas où le système est fortement amorti*** : $\xi \succ \omega_0$

$$q(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$
$$r_{1,2} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - \omega_0^2}$$

- ***Cas où l'amortissement est critique :*** $\xi = \omega_0$

$$q(t) = (A_1 t + A_2) e^{r\,t}$$
$$r_1 = r_2 = r = -\xi$$

- ***Cas où l'amortissement est faible*** : $\xi \prec \omega_0$

$$q(t) = A e^{-\xi t} \cos(\omega t + \varphi) \qquad avec \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}$$

- On définit **le décrément logarithmique** δ qui représente la décroissance de l'amplitude à une seule période du système comme suit:

$$\delta = Ln \frac{q(t)}{q(t+T)} = \xi T$$

- Il faut signaler que le système subit **une perte d'énergie totale due au travail des forces de frottements.**

Problème 1:

On définit un **oscillateur amorti** régi par l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

Avec m est la masse du corps, k est le coefficient de rappel et x est le déplacement du corps. On lance le système avec une vitesse initiale v_0=25cm/s.

Donc on a : t=0, x=0 et $\dot{x} = v_0$

- Calculer la période propre du système,
  Sachant que : m=150g et k=3.8N/m.
- Montrer que si α=0.6kg/s, le corps a un mouvement oscillatoire amorti.
- Résoudre dans ce cas l'équation différentielle.
- Calculer le pseudo-période du mouvement
- Calculer le décrément logarithmique δ.
- Calculer le temps t_m au bout duquel la première amplitude x_m est atteinte. En déduire x_m. Calculer la vitesse d'une pseudo-période.
- Montrer que la diminution de l'énergie totale est due au travail des forces de frottement.

Problème 2 :

Soient les systèmes mécaniques représentés dans les figures 1.3 et 2.3 comme suit :

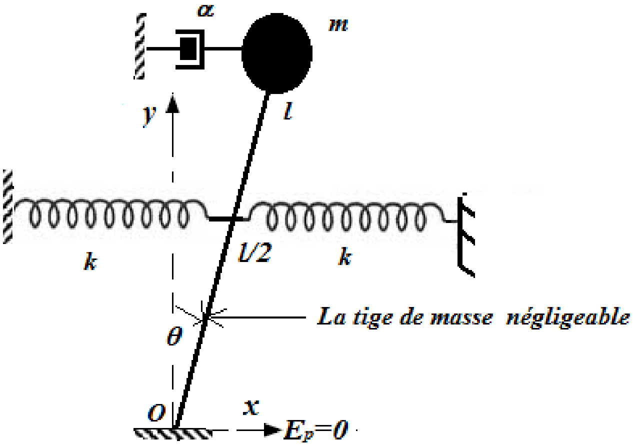

Figure 1.3 : Mouvement oscillatoire amorti en rotation

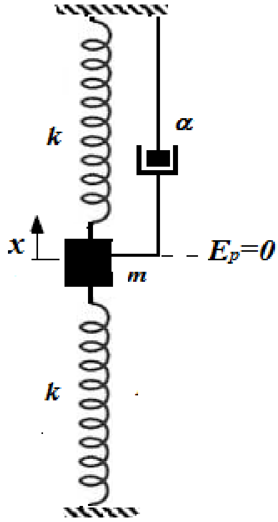

Figure 2.3 : Mouvement oscillatoire amorti en translation

Pour des petites oscillations, déterminer pour chaque système :

- Le Lagrangien
- L'équation différentielle du mouvement.
- La pulsation propre et la période propre.
- La solution générale pour un faible amortissement.