Série de TD 2 : Mouvement oscillatoire libre à 1 Degré de liberté

OBJECTIFS

- L'équation différentielle d'un mouvement harmonique
- La solution du problème
- Quelques exemples d'applications:
  - Oscillations mécaniques
  - Oscillations électriques
  - Oscillations acoustiques

CE QU'IL FAUT RETENIR

- **L'oscillation harmonique** est régie l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$$

- **La solution de cette équation différentielle** est de la forme :

$$q(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t)$$

- **La période propre T_0** est donnée comme suit :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

  - Où ω_0 est appelée **la pulsation propre** du système

- Il faut signaler **que l'énergie totale du système conservatif est constante** par rapport au temps.

Problème 1:

Un système hydraulique de forme U constitué de deux tuyaux cylindriques de sections S_1, S_3 reliés par un autre cylindre de section S_2 et de longueur B qui contient un liquide de masse volumique ρ. Le système est équivalent à un ressort de raideur k_e et de masse M_e. A l'équilibre le liquide a la hauteur H, figure 1.2.

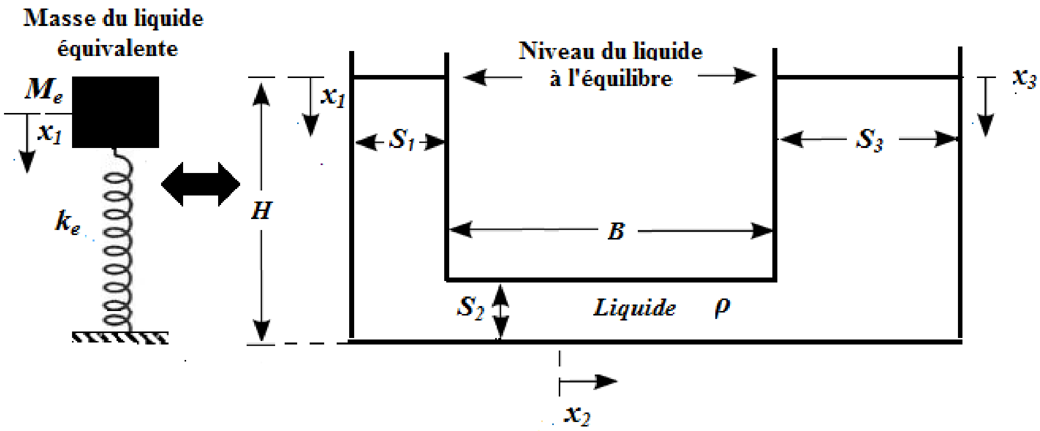


Figure 1.2: Mouvement oscillatoire d'un liquide dans un tube

Dans le cas des oscillations linéaires, déterminer :

- Le nombre de degré de liberté. L'énergie cinétique, l'énergie potentielle.
- En déduire le Lagrangien.
- L'équation différentielle du mouvement ; et la pulsation propre.

Problème 2:

La **résonance de Helmholtz** est un phénomène **de résonance de l'air dans une cavité.** Les **constructeurs automobiles peuvent utiliser ce dispositif à des fins cosmétiques, pour rendre le bruit d'un véhicule plus sportif lors des accélérations**. On définit le système par un gaz parfait de pression P_0, de volume V_0 à l'équilibre thermique, enfermé dans une enceinte reliée par un piston de masse m qui oscille sans frottement suivant l'axe Ox comme le montre la figure (2.2) ci-dessous :

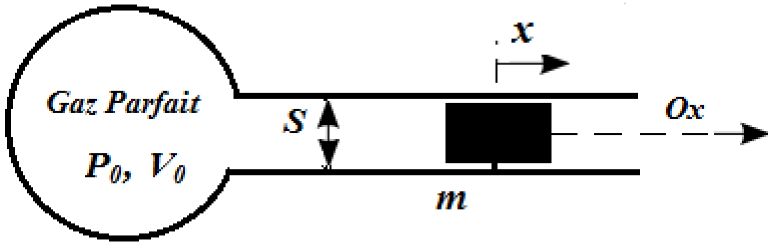


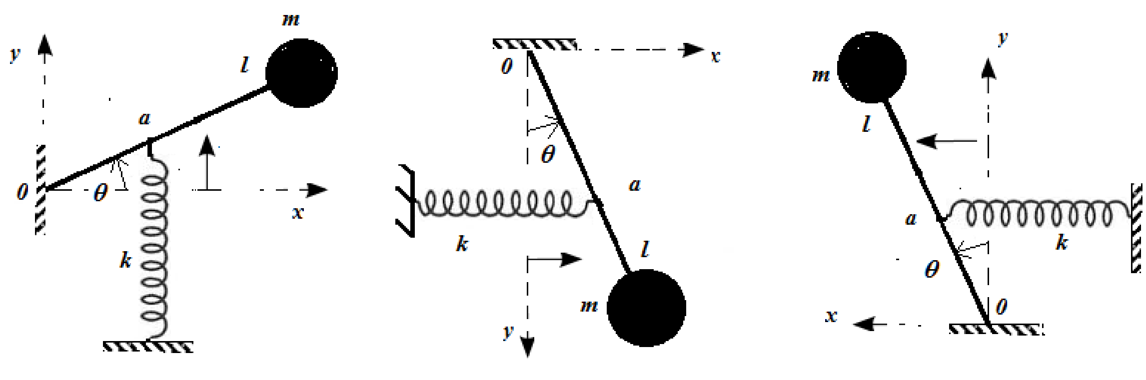
Figure 2.2 : Modélisation physique du mouvement-Résonateur d'Helmholtz

L'ensemble du système évolue en **opération adiabatique**.

- Déterminer l'équation différentielle du mouvement en appliquant la loi fondamentale de la dynamique.
- En déduire la pulsation propre du système et la solution générale.

Problème 3:

Soient les systèmes mécaniques constitués par une tige de masse négligeable, de longueur *l* reliée par un ressort de raideur *k* représentés dans la figure 3.2 : A-B-C comme suit:



-A- **-B-** **-C-**

Figure 3.2: Couplage pendule ressort

Pour des petites oscillations, déterminer pour chaque système de la figure (3.2):

- Le Lagrangien du système.
- L'équation différentielle du mouvement.

- La pulsation propre et la période propre.
- La solution générale. Interpréter les résultats.

Problème 4 :

Soit un système électrique (L_{ind}, C_{ap}) en série représenté dans la figure 4.2 comme suit :

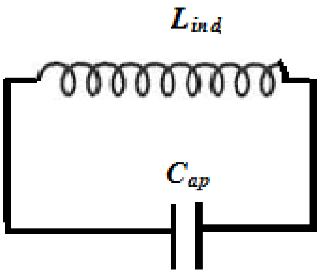


Figure 4.2 : Circuit L.C Libre

- A partir des **lois du Kirchhoff**, établir l'équation différentielle du mouvement.
- En déduire la pulsation propre du mouvement.

Problème 5:

Le **fléau** est **un instrument agricole utilise pour le battage des céréales**. On modélise le système par une tige métallique de masse négligeable, de longueur l portant deux masses m et M, tournant sans frottement autour de son axe au point fixe O comme le montre la figure 5.2 A l'équilibre la barre est horizontale.

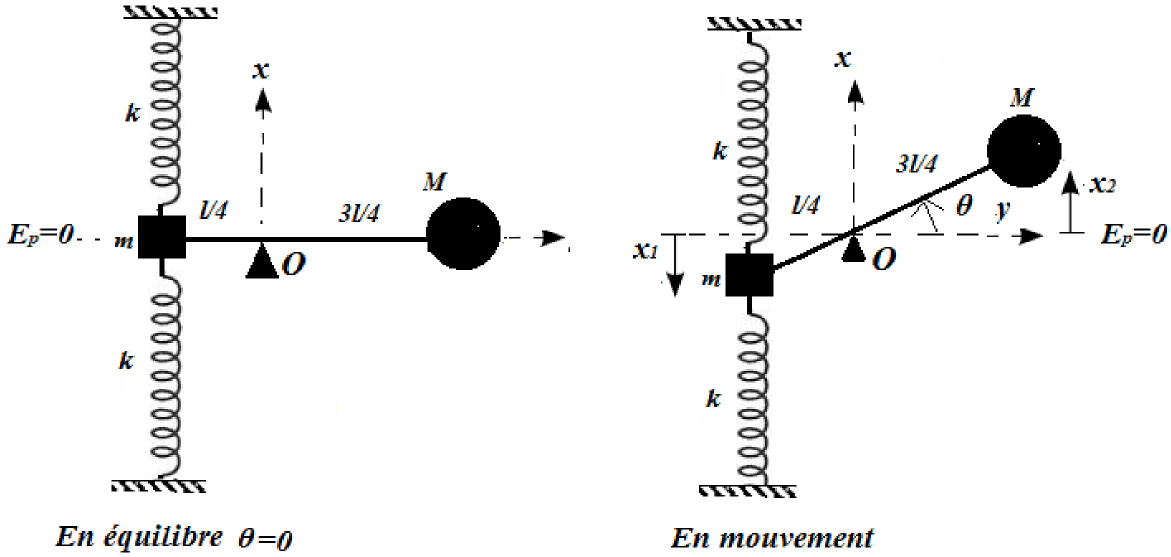


Figure 5.2 : Modèle physique du Fléau

Déterminer:

- Le Lagrangien du système
- L'équation différentielle du mouvement,
- La pulsation propre et la période propre.
- La solution générale avec les conditions initiales suivantes :

$$\theta(t=0)=0 \text{ et } \dot{\theta}(t=0)=\dot{\theta}_0$$