Mini projet -4

OBJECTIFS

1. Le système différentiel couplé à plusieurs degrés de liberté en régime forcé
2. Les différentes solutions du problème
3. Les phénomènes de « **Résonance et Antirésonance** »
4. Application : **Etouffeur dynamique**

Partie A :

On considère le modèle **d'un oscillateur harmonique vertical** représenté dans la figure 1 par une masse *m* placé dans un potentiel élastique du type $E_p = \frac{1}{2}kx^2$.

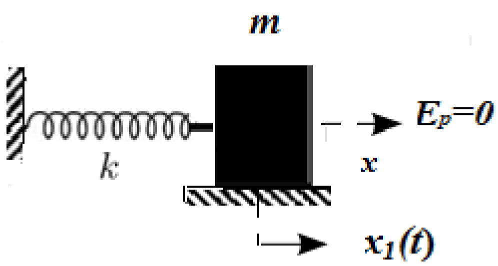

Figure 1 : Modèle de l'oscillateur harmonique.

- Etablir le Lagrangien
- Déterminer l'équation différentielle du mouvement du système.
- Déterminer la solution générale en utilisant les conditions initiales :

$$x(t=0)=0 \qquad et \qquad \dot{x}(t=0)=v_0$$

Partie B :

Le système précédent est couplé à un autre oscillateur harmonique de masse *M* et de raideur *K*. Figure 2.

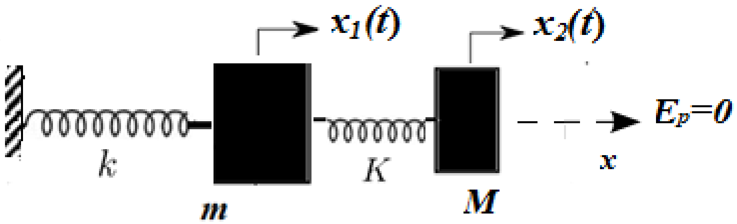

Figure 2 : Couplage de deux oscillateurs harmoniques.

- Etablir le Lagrangien du système.
- Déterminer les équations différentielles du mouvement.
- On propose les solutions générales de la forme :

$$x_1(t) = Ae^{i(\omega_p t+\varphi)} \quad et \quad x_2(t) = Be^{i(\omega_p t+\varphi)}$$

Déterminer les modes propres ω_{1p} et ω_{2p}

- Donner les rapports d'amplitudes aux modes propres.
- En déduire les solutions générales.

Partie C :

On se propose maintenant d'étudier le fonctionnement de l'étouffeur dynamique des vibrations, modélisé par deux masses couplées *M* et *m* oscillent à l'horizontale comme le montre la figure 3. Le système est soumis à une force de frottement visqueuse dont le coefficient de frottement est α et une force extérieure sinusoïdale de la forme :

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t \,.$$

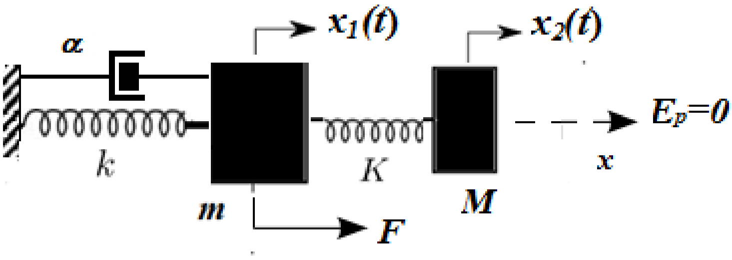

Figure 3 : Modèle physique d'un étouffeur dynamique des vibrations

- Déterminer les équations différentielles du mouvement.

- On propose les solutions particulières comme suit:

$$x_1(t) = \hat{A}e^{i(\Omega t)} \qquad et \quad x_2(t) = \hat{B}e^{i(\Omega t)}$$

Déterminer les modules d'amplitudes des solutions particulières $|\hat{A}|\, et \quad |\hat{B}|$ en régime permanent.

- Quelle est la condition pour avoir l'annulation du mouvement de la masse *m*. Commenter les résultats.

Solutions :

Partie A

Le vecteur de position est égal a :

$$o\vec{m} = x\vec{i} \qquad \Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{x}\vec{i}$$

L'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

L'énergie potentielle pour des petites oscillations, s'écrit sous la forme:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

Alors, le Lagrangien du système est de la forme:

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

L'équation de mouvement est de la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

D'ou

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

La pulsation propre est égale a :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

En appliquant les conditions initiales :

$$t = 0, x = 0 \Rightarrow \quad \cos\varphi = 0 \Rightarrow \quad \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$t = 0, \dot{x} = v_0 \Rightarrow \quad A = \frac{v_0}{\omega} \quad avec \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

La solution finale sera exprimée comme suit :

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \quad x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

- Le Lagrangien du système :

  L'énergie cinétique du système s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2(t) + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2(t)$$

L'énergie potentielle du système s'exprime par rapport à l'état d'équilibre:

$$E_p = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2$$

Le Lagrangien s'écrit alors :

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2(t) + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2(t) - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2$$

- Les équations différentielles du mouvement :

$$\begin{matrix} \dfrac{d}{dt}(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1})-\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=0 \\ \dfrac{d}{dt}(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2})-\dfrac{\partial L}{\partial x_2}=0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x}_1+(k+K)x_1-Kx_2=0 \\ M\ddot{x}_2+Kx_2-Kx_1=0 \end{cases}$$

On propose les solutions générales :

$$x_1(t)=Ae^{i(\omega_p t+\varphi)} \qquad et \quad x_2(t)=Be^{i(\omega_p t+\varphi)}$$

en remplaçant dans le système différentiel, on obtient un système linéaire comme suit:

$$\begin{cases} \left[-m\omega_p^2+(k+K)\right]A-KB=0 \\ -KA+\left[-M\omega_p^2+K\right]B=0 \end{cases}$$

Le système admet des solutions non nulles si seulement si :

$$det=0$$

D’ou

$$(-m\omega_p^2+(K+k))(-M\omega_p^2+K)-K^2=0$$

On obtient alors :

$$\omega_p^4-\omega_p^2(\frac{K}{M}+\frac{K+k}{m})+\frac{Kk}{mM}=0$$

En résolvant l’équation ; on obtient les modes propres comme suit :

$$\begin{cases} \omega_{1p}^2=\dfrac{K}{2M}+\dfrac{K+k}{2m}+\dfrac{1}{2}\sqrt{(\dfrac{K}{M}+\dfrac{K+k}{m})^2-4\dfrac{kK}{mM}} \\ \omega_{2p}^2=\dfrac{K}{2M}+\dfrac{K+k}{2m}+\dfrac{1}{2}\sqrt{(\dfrac{K}{M}+\dfrac{K+k}{m})^2-4\dfrac{kK}{mM}} \end{cases}$$

les rapports d’amplitudes aux modes propres :

$$\begin{cases} \left.\dfrac{A_1}{B_1}\right|_{\omega_p=\omega_{1p}} = \dfrac{K}{-m\omega_{1p}^2 + k + K} \\ \left.\dfrac{A_2}{B_2}\right|_{\omega_p=\omega_{2p}} = \dfrac{K}{-m\omega_{2p}^2 + k + K} \end{cases}$$

Les solutions générales s'écrivent alors :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\omega_{1p}t + \varphi) + A_2 \cos(\omega_{2p}t + \varphi) \\ x_2(t) = B_1 \cos(\omega_{1p}t + \varphi) + B_2 \cos(\omega_{2p}t + \varphi) \end{cases}$$

Partie c :

Les nouvelles équations différentielles du mouvement :

$$\begin{matrix} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \sum_i \left|\overline{F}_{ext}\right| \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k+K)x_1 - Kx_2 = F(t) - \alpha\dot{x}_1 \\ M\ddot{x}_2 + Kx_2 - Kx_1 = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + (k+K)x_1 - Kx_2 = F_0 \cos\Omega t \\ M\ddot{x}_2 + Kx_2 - Kx_1 = 0 \end{cases}$$

En régime permanent, en remplaçant la forme des solutions particulières dans le système différentiel on obtient alors le système linéaire comme suit :

$$\begin{cases} \left[-m\omega_p^2 + (k+K) + i\Omega\alpha\right]\hat{A} - KB = F_0 \\ -K\hat{A} + \left[-M\omega_p^2 + K\right]\hat{B} = 0 \end{cases}$$

Les modules d'amplitudes des solutions particulières s'écrivent alors comme suit :

$$
\begin{cases}
|\hat{A}| = \dfrac{F_0}{m}\dfrac{\Omega^2-\dfrac{K}{M}}{\left[-\Omega^4+\Omega^2\left(\dfrac{k+K}{m}+\dfrac{K}{M}\right)-\dfrac{K}{M}\dfrac{k}{m}\right]+i\dfrac{\alpha}{m}\Omega\left(\Omega^2-\dfrac{K}{M}\right)} \\
|\hat{B}| = \dfrac{-\dfrac{F_0}{m}\dfrac{K}{M}}{\left[-\Omega^4+\Omega^2\left(\dfrac{k+K}{m}+\dfrac{K}{M}\right)-\dfrac{K}{M}\dfrac{k}{m}\right]+i\dfrac{\alpha}{m}\Omega\left(\Omega^2-\dfrac{K}{M}\right)}
\end{cases}
$$

la masse *m* est immobile lorsque la pulsation de la force extérieure est égale a :

$$\Omega_a{}^2 = \frac{K}{M}$$

D'où l'amplitude *a* est nulle dans ce cas. Dans ces conditions, un tel dispositif est appelé un étouffeur dynamique de vibrations.

La figure illustre les phénomènes de résonance et antirésonance.

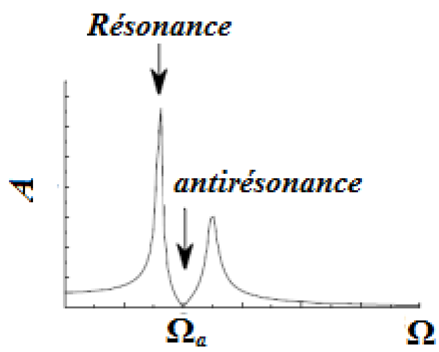

Figure 42.5 : Phénomène de résonnance et antirésonance