Mini projet -3

OBJECTIFS :

1. L'équation différentielle d'un mouvement forcé
2. Les différentes solutions du problème
3. Le phénomène de résonance
4. Application pour « **un capteur d'amplitude** »

On définit un sismomètre comme un système physique appelé capteur qui comprend un support et une masse *m* relié par un ressort et un amortisseur disposés en parallèle, la figure 1. La masse, de centre de gravité *G*, ne peut se déplacer que verticalement. Le support, le ressort et l'amortisseur ont une masse négligeable.

Le ressort a une longueur à vide *l* et une rigidité *k*. La constante de frottement est α. On précise que si, les extrémités *A* et *B* d'un amortisseur appartenant à un système mécanique, décrivent un axe *Δ* parallèle à l'axe Ox avec des vitesses respectives v_a et v_b, l'amortisseur exercice sur le reste du système en point *A* une force $\alpha(v_b - v_a)\vec{i}$ et en point *B* une force $\alpha(v_a - v_a)\vec{i}$ où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire.

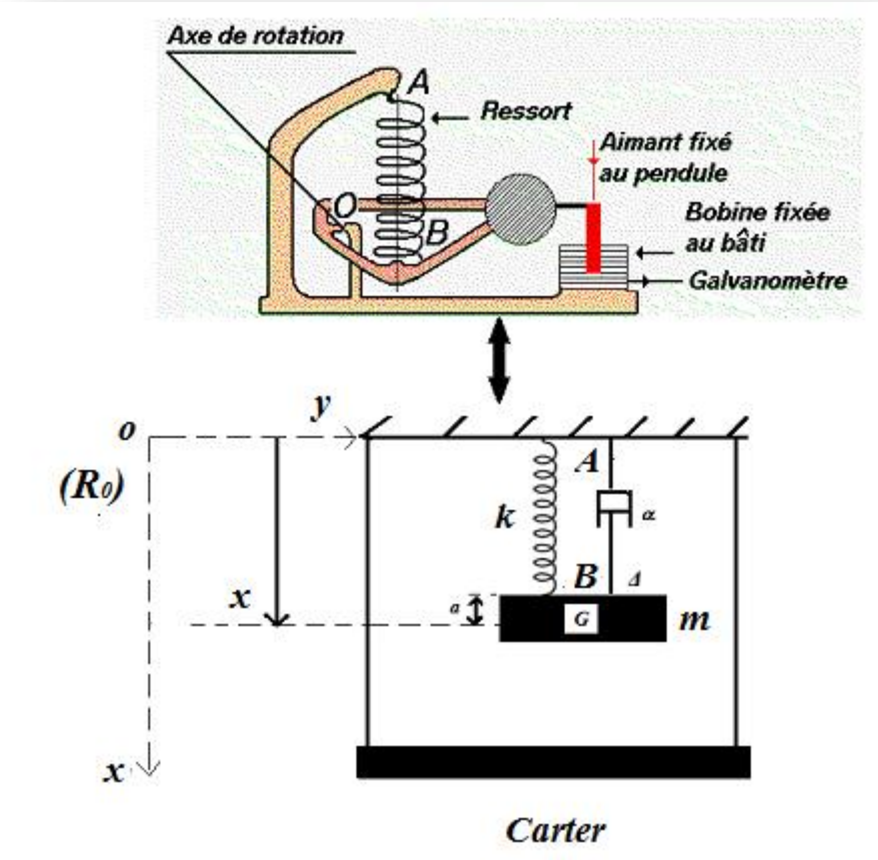

Figure 1 : Modélisation d'un sismomètre

Partie A :

Le support est immobile par rapport au repère (R_0).

- Calculer l'abscisse x_0 du centre d'inertie de la masse en équilibre.
- Ecrire l'équation différentielle du mouvement de la masse écarté de sa position d'équilibre.
- Que devient cette équation quand on pose $x=x_0+X$.

On pose les constantes suivantes :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \ \alpha = \lambda f_C \text{ avec } f_c^2 = 4km.$$

Montrer que l'équation différentielle s'écrit sous la forme suivante :

$$\ddot{x} + \alpha^* \dot{x} + \beta^* x = 0$$

- Calculer α^* et β^* en fonction de λ et ω_0.
- On donne $\lambda = 0.5$, $\omega_0 = 10\ rad/s$. A l'instant initial, $X = 1\ cm$ et $\dot{X} = 0$.
  Déterminer X pour $t = 0.2s$.

Partie B :

On suppose maintenant que le support est solidaire du carter d'une machine animé d'un mouvement sinusoïdale verticale $x_1 = b \sin \omega t$ par rapport au repère (R_0), comme le montre la figure 2. On suppose que b est positif.

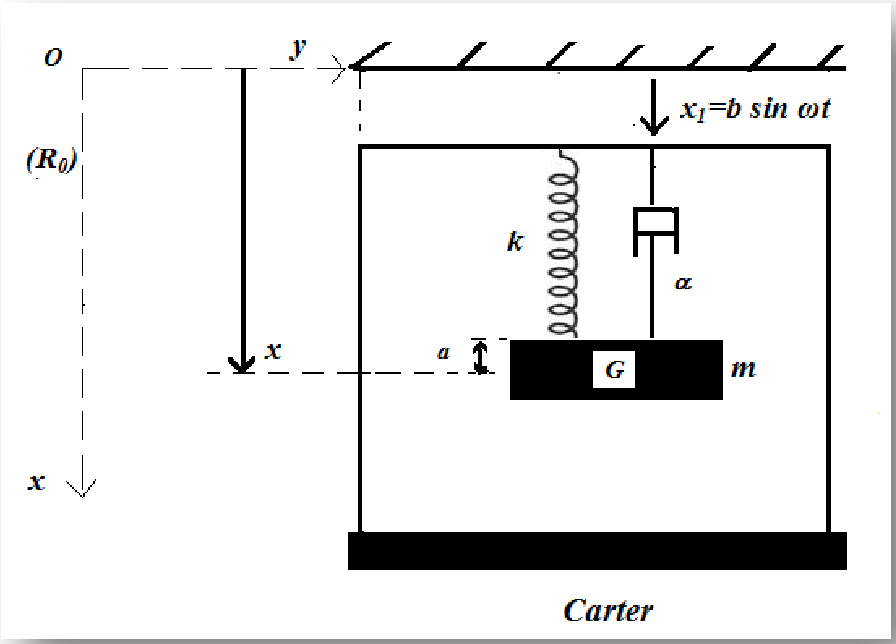

Figure 2 : Système est en mouvement forcé

- Ecrire l'équation de la masse par rapport à (R_0).
- Montrer que l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\ddot{x} + \alpha^* \dot{x} + \beta^* x = H \sin \omega t$$
$$Avec \quad x = X + C + b \sin \omega t$$

- Déterminer H et C, que représente X ?

- Etudier la solution en régime permanent

$$X(t) = B\sin(\omega t - \varphi)$$

Avec B positif.

- Calculer le rapport $\frac{B}{b}$ et $\tan\varphi$ en fonction de λ et $\mu = \frac{\omega}{\omega_0}$.
- Tracer l'allure du graphe de B en fonction de μ tel que $B=f(\mu)$.

- On suppose que $\lambda=0.5$:

Montrer que si μ est supérieur à une certaine valeur μ_1, $\frac{B}{b} - 1$ est inférieur à 10^{-2}. Calculer dans ce cas μ_1.

- En déduire une condition pour que l'appareil puisse fonctionner en capteur d'amplitude.

Solutions :

Partie A : Le support est immobile par rapport au repère (R_0).

- A l'équilibre, l'abscisse x_0 s'écrit comme suit :

$$\sum_{i\geq 1}\vec{F_i} = \vec{O} \quad \Longrightarrow \quad x_0 = \frac{mg}{k} + (l + a)$$

- L'équation différentielle du mouvement est de forme :

En appliquant la loi dynamique

$$m\ddot{x} = -k(x - (l + a)) + mg - \alpha\dot{x}$$

D'ou

$$d'où \quad \dot{x} = \dot{X} \qquad \ddot{x} = \ddot{X}$$

Alors :

$$m\ddot{X} + \alpha\dot{X} + kX = 0$$

- La nouvelle équation du mouvement s'écrit alors :

$$\ddot{X} + 2\lambda\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$$
$$Avec \quad \alpha^* = 2\lambda\omega_0 \quad \beta^* = \omega_0^2$$

- La résolution de cette équation différentielle :

$$r^2 + 2\lambda\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$
$$\Delta' = \omega_0^2(\lambda^2 - 1)$$
$$\lambda = 0.5 \quad \Rightarrow \quad \Delta' = \omega_0\sqrt{1-\lambda^2} = -\Omega^2$$

- ❖ La solution est de la forme :

$$X(t) = e^{-\lambda\omega_0 t}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$$
$$Avec \quad A = X_0 \quad B = \frac{\lambda X_0}{\sqrt{1-\lambda^2}}$$

- ❖ Le système a un mouvement oscillatoire amorti.
- ❖ La valeur de X est : $X=0.15m$

<u>Partie B</u> : Le support est mobile par rapport au repère *(R_0)***.**

- La relation dynamique du mouvement :

$$m\ddot{x} = -k(x - x_1 - (l+a)) + mg - \alpha(\dot{x} - \dot{x}_1)$$
$$d'où \quad \dot{x} = \dot{X} + \dot{x}_1 \quad et\ \ddot{x} + \ddot{x}_1 = \ddot{X} - \omega^2 b\sin\omega t$$

L'équation du mouvement devient alors :

$$\ddot{X} + 2\lambda\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega^2 b\sin\omega t$$
$$Avec \quad H = \omega^2 b$$

- La solution totale de l'équation différentielle en régime permanent est :

$$X(t) = X_p(t) = B\sin(\omega t - \varphi)$$

- ❖ En notation complexe on aura la forme suivante :

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}_p(t) = Be^{j(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})}$$

- ❖ En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient alors :

$$B=\frac{b\mu^2}{\sqrt{(1-\mu^2)^2+(2\lambda\mu)^2}} \qquad \tan\varphi=\frac{2\lambda\mu}{1-\mu^2}$$

$$Avec \quad \mu=\frac{\omega}{\omega_0}$$

- Les variations de $B=f(\mu)$:

$$\left.\frac{dB}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_m}=0 \quad \Rightarrow \quad \mu=\mu_m=\begin{cases}\mu=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-2\lambda^2}}\end{cases} \qquad si \quad \lambda\prec\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ainsi, on peut distinguer deux cas :

- $\lambda\prec\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ Amortissement faible $\Rightarrow$ Résonance
- $\lambda\succ\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ Amortissement important

- On peut en déduire que :

$$\mu=0 \quad \Rightarrow \quad B=0$$
$$\mu\to\infty \quad \Rightarrow \quad B\to b$$

- Pour $\lambda=0.5$, on aura :

$$B=B_{max}=1.15b \qquad pour \qquad \mu_m=\sqrt{2}$$
$$\frac{B}{b}-1\le 10^{-2} \qquad si \qquad \mu\ge\mu_1$$
$$\frac{\mu_1^2}{\sqrt{(1-\mu_1)^2+\mu_1^2}}-1=10^{-2} \qquad d'où \qquad \mu_1=7.05$$

On peut conclure que l'appareil reproduit les oscillations du carter si la pulsation ω est importante. Il fonctionne alors en capteur d'amplitude.