Mini projet -1

OBJECTIFS :

1. L'équation différentielle d'un mouvement forcé
2. Les différentes solutions du problème
3. Le phénomène de résonance
4. Le calcul de la fonction du transfert

Dans tous le problème, on considère une machine mécanique assimilée au point matériel m de masse *m* pouvant se déplacer parallèlement à l'axe vertical *Ox*. La suspension le reliant au support est modélisée par un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur *k* en parallèle avec un amortisseur exerçant sur la machine une force de frottement $\vec{f}_{fr} = -\alpha\vec{v}$.

Le support reste fixe dans un référencier galiléen et on note le champ de pesanteur $\vec{g}$

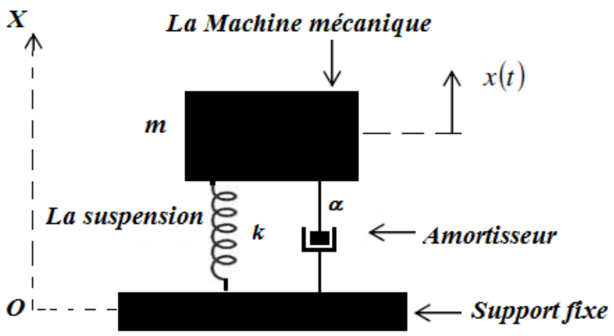

Figure 1 : Modélisation mouvement de la machine

Partie 1 :

On écarte la machine de sa position d'équilibre et puis on la laisse évoluer librement.

- Déterminer le Lagrangien du système.
- On pose les constantes suivantes :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad et \quad 2\eta = \frac{\alpha}{m\omega_0}$$

Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par *x(t).*

- On suppose que $\eta \prec 1$. Donner la forme de la solution générale *x(t)* en fonction des paramètres η *et* ω_0 avec les conditions initiales suivantes :

$$x(t=0) = 0 \quad et \quad \dot{x}(t=0) = v_0$$

Comment appelle-t-on ce régime dans ce cas-là ?

- Calculer le décrément logarithmique $\boldsymbol{\delta}$
- Montrer que la diminution de l'énergie totale E_T du système est due au travail des forces de frottement

Partie 2 :

La machine mécanique maintenant *m* est excitée par l'intermédiaire des supports de suspension la montre la figure 2 :

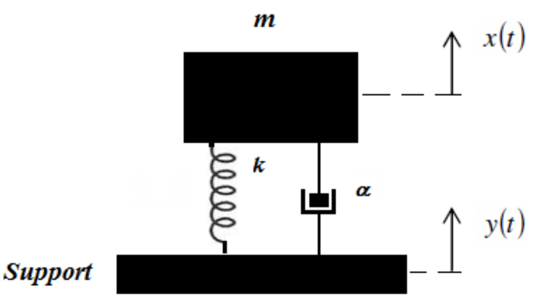

Figure 2: Excitation de la masse par le support vibrant

On suppose que le support possède un déplacement harmonique de forme :

$$y(t) = B\cos\omega t$$

- Déterminer le Lagrangien du système.
- Etablir l'équation différentielle du mouvement.
- On cherche une solution de la forme :

$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi)$$

Déterminer le rapport des modules d'amplitudes $T = \left|\frac{A}{B}\right|$ en fonction des paramètres η , ω_0 et ω.

- On pose la variable suivante:

$$r = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Tracer la courbe $T(r)$ et interpréter les résultats.

Solutions :

Le mouvement du système est schématisé dans la figure 25.4 comme suit :

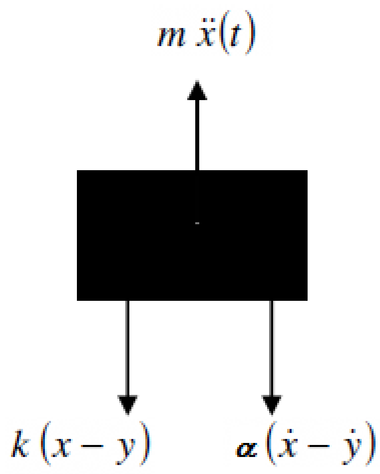

Figure 25.4 : Mouvement forcé de l'ensemble (support + machine)

- Le Lagrangien du système s'écrit :

  L'énergie cinétique s'exprime:

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

Pour L'énergie potentielle on a :

$$E_p = \frac{1}{2} k(x-y)^2$$

D'où le Lagrangien du système s'écrit :

$$L(\dot{x},x) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} k(x-y)^2$$

- L'équation du mouvement s'écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=\sum \overline{F}_{ext} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x}(t)+k[x(t)-y(t)]=-\alpha[\dot{x}(t)-\dot{y}(t)]$$

D'où :

$$m\ddot{x}(t)+\alpha\dot{x}(t)+kx(t)=\alpha\dot{y}(t)+ky(t)$$

C'est une équation différentielle non homogène.

- La solution de l'équation différentielle:

En posant les constantes suivantes :

$$\omega_0^2=\frac{k}{m} \qquad et \qquad 2\xi=\frac{\alpha}{m\omega_0}$$

L'équation du mouvement se réécrit avec les nouvelles constantes :

$$m\ddot{x}(t)+2\xi\omega_0\dot{x}(t)+\omega_0^2x(t)=2\xi\omega_0\dot{y}(t)+\omega_0^2y(t)$$

On considère que le support possède un déplacement sinusoïdal :

$$y(t)=B\cos\omega t=Re\left\{Be^{j\omega t}\right\}$$

On chercher des solutions de la forme :

$$x(t)=A\cos(\omega t-\phi)=Re\left\{Ae^{j(\omega t-\phi)}\right\}$$

L'équation du mouvement devient alors :

$$(-\omega^2+j2\xi\omega_0\omega+\omega_0^2)Ae^{-j\phi}=(j2\xi\omega_0\omega+\omega_0^2)B$$

Le rapport des modules des amplitudes s'écrit sous la forme:

$$T=\left|\frac{A}{B}\right|=\omega_0\left[\frac{(2\xi\omega)^2+\omega_0^2}{(-\omega^2+\omega_0^2)^2+(2\xi\omega_0\omega)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

- En posant la constante :

$$r=\frac{\omega}{\omega_0},$$

La courbe de la fonction *T(r)* est décrite comme suit:

$$T=\left|\frac{A}{B}\right|=\left[\frac{(2\xi r)^2+1}{(-r^2+1)^2+(2\xi r)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

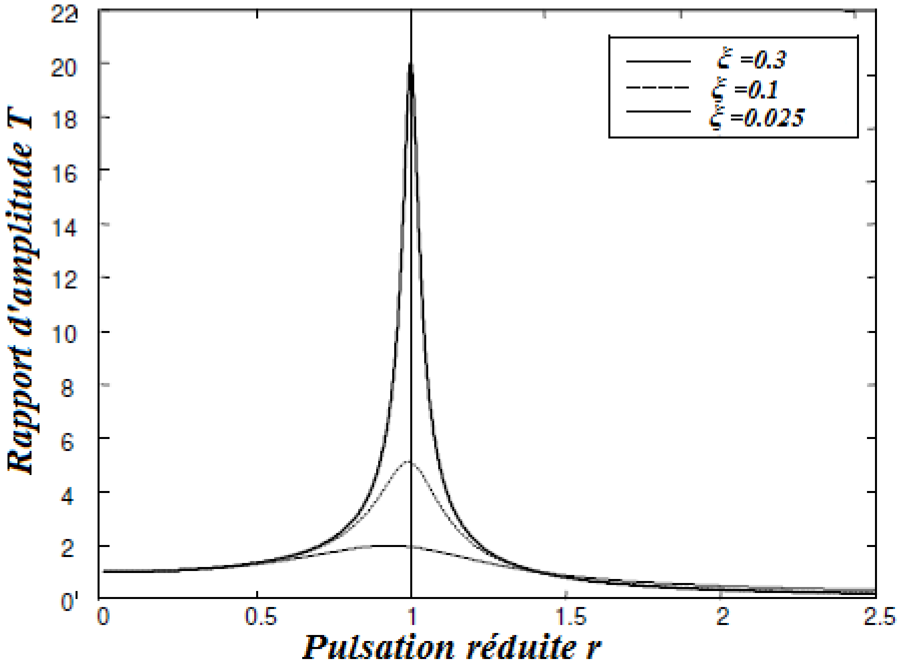

Figure 26.4 : Rapport de transmissibilité en déplacement en fonction de la pulsation réduite

On a vu que la solution particulière pouvait représenter seule la solution stationnaire