Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques de Tlemcen-
Département de physique
Module : Physique 3
2015-2016

Mini projet -8

OBJECTIFS

1. Etude l'équation de mouvement de la corde vibrante
2. Les différentes solutions du problème
3. Etude les modes propres pour différentes figures de la corde
4. Application : **Réflexion et Transmission**

Dans tout le problème on considère une corde vibrante homogène et sans raideur, de masse linéique μ, tendue par une force de tension d'intensité $\boldsymbol{F}$ constante. la corde au repos est horizontale et matérialisée par l'axe Ox .

Partie 1 :

On étudie des petits mouvements transversaux d'un point **M** d'abscisse *x* de la corde $y = f(x,t)$ au plan Oxy . En admettant qu'un élément de corde au repos M_0 reste pendant le mouvement à la même abscisse. L'élongation d'un point d'abscisse *x* à l'instant *t* est notée $y(x,t)$. La tangente en *M à* la corde fait avec l'axe Ox un angle $\theta(x,t)$ qui reste petit, ce qui suppose que $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \prec\prec 1$.

Enfin, l'action du champ de pesanteur sur le mouvement, ainsi que toute cause d'amortissement sont négligées.

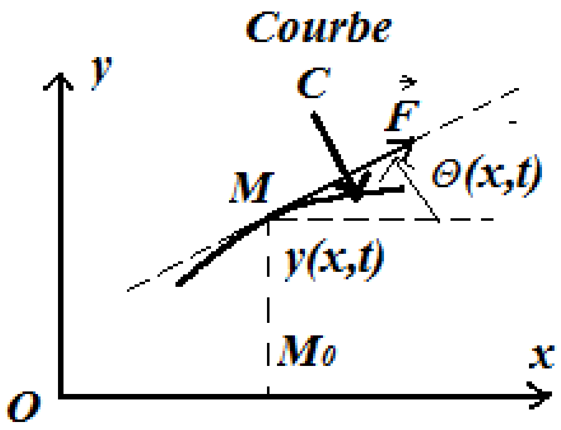

Figure 1: Elément de la corde

- **Équation d'onde pour un ébranlement le long de la corde**

❖ La longueur de la corde varie très peu lorsqu'elle vibre. Montrer qu'à des termes du second ordre en $\theta(x,t)$ près, l'abscisse curviligne ***C*** peut être confondue avec l'abscisse *x*.

❖ On admet que la tension $\vec{F}$ reste, en tout point, tangente à la corde. Écrire la relation fondamentale de la dynamique pour un élément de la corde compris entre x et $x+dx$.

❖ Montrer à l'aide des hypothèses faites que la tension $\vec{F}$ est de module constant, noté ***F***, et que l'ébranlement est régi par une équation aux dérivée partielles dont on déterminera.

❖ Exprimer la célérité ***V*** en fonction de ***F*** et μ .

- **Solution en ondes progressives de l'équation de d'Alembert :**

❖ Introduire les grandeurs $p = t - \frac{x}{V}$ et $q = t + \frac{x}{V}$.

En déduire la solution générale de l'équation aux dérivées partielles de l'onde.

- ***Applications numériques*** :

❖ Calculer *V* pour une cordelette (type de Melde) en coton ou nylon de 1 gramme par mètre tendue sur une poulie par une masse de 100g.

- Calculer V pour une corde tendu d'acier de masse volumique $\rho = 7.2 10^{3} kgm^{-3}$, de rayon $1mm$.

Partie 2 :

A présent la corde de longueur $\boldsymbol{a}$ est fixée en ses extrémités, deux points de l'axe Ox d'abscisse $x=0$ et $x=a$.

- On cherche des solutions de l'équation (1) sous la forme de variables séparées :

$$y(x,t) = f(x)g(t)$$

  - Montrer que f et g doivent être des fonctions sinusoïdales.
  - En notant ω la pulsation de $g(t)$. Quelle est la relation de dispersion $k(\omega)$?

- En utilisant les conditions aux limites, Montrer que les fréquences propres f_n sont multiples d'une fréquence fondamentale f_1 ($f_n = nf_1 \; avec \quad n \in N^*$).
  En déduire la longueur d'onde λ_n .
- Montrer que l'expression de la solution générale $y_n(x,t)$ s'écrit sous la forme :

$$y_T(x,t) = \sum_{n\geq 1}\left[C_n \cos\frac{n\pi ft}{a} + D_n \sin\frac{n\pi ft}{a}\right]\sin\frac{n\pi}{a}x$$

- ***Applications numériques*** **:**
  - Pour une corde de longueur $\boldsymbol{a}$, oscillant à la fréquence $\boldsymbol{f}$, donner la tension F_n à appliquer pour obtenir le seul mode n.
  - En déduire $\boldsymbol{f}$ pour $n=1$, (la fréquence fondamentale), $F_1 = 2930N$, $\mu = 5.65 10^{-3} kg.m^{-1}$ et $a=1.22m$.

Partie 3 :

- **Corde de piano**

A l'instant $t=0$, la corde est immobile dans la position d'équilibre $y(x,0)$. Elle est frappée avec un petit marteau de largeur $\boldsymbol{e}$ (avec $e \prec\prec 1$) situé entre les abscisses $x = d \quad et \quad x = d + e$, qui communique par le choc une impulsion initiale à la partie frappée. Dans ces conditions, la vitesse de chaque point de la corde à l'instant *t=0* est modélisée par une « **fonction créneau » comme suit**.

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = u \quad pour \quad d \le x \le d+e$$
$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 \quad pour \quad ailleurs$$

- Déterminer les coefficients C_n et D_n .
- Trouver une application musicale du fait que les coefficients dépendent de *d*. Que faut-il faire pour supprimer un harmonique, en particulier celui correspondant à ***n=7***?
- Dans le cas $d = \frac{a}{2}$. Quelles sont les harmoniques présentes ?

- **Corde de clavecin, de guitare ou de harpe**

La même corde est pincée et lâchée au temps *t=0* de telle sorte que sa vitesse initiale soit nulle. L'endroit *x=d* où a lieu le pincement joue le même rôle vis à vis des harmoniques que celui de la frappe. En conséquence, et afin de limiter les calculs, nous nous limitons à un pincement en $x = \frac{a}{2}$ si bien que la position initiale de la corde est définie par la « **fonction triangle** » comme suit :

$$y(x,0) = \frac{2h}{a} \quad pour \quad 0 \le x \le \frac{a}{2}$$
$$y(x,0) = \frac{2h}{a}(a-x) \quad pour \quad \frac{a}{2} \le x \le a$$

- Déterminer les coefficients C_n et D_n .
- Comparer les spectres d'une corde à piano et d'une corde à clavecin et apprécier la différence de timbre sonore.

- **Pour une corde de guitare ou de harpe**, le pincement peut être effectué délicatement avec un doigt de telle sorte que la position initiale soit définie par la « **fonction parabole »** comme suit:

$$y(x,0) = \frac{2h}{a^2}x(a-x)$$

- Déterminer les coefficients C_n et D_n
- Reprendre les calculs dans ce cas et conclure.

- **Oscillations entretenues:** Expliquer ce qui se passe si, l'extrémité $x=a$ étant fixée, on place en $x=0$ un vibreur de très faible amplitude de telle sorte que $y(0,t)=A\cos\Omega t$.

- **Réflexion et transmission sur discontinuité :**

  Une corde très longue est composée de deux tronçons de masses linéiques μ_1 et μ_2 , la tension étant toujours ***F***, le nœud en $x=0$ est sans masse.

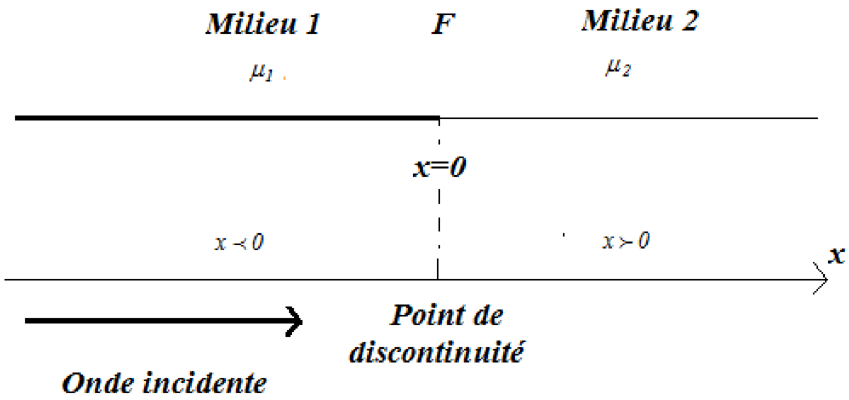

Figure 28.7 : Phénomène de transmission et de réflexion

Du coté $x<0$ arrive un ébranlement d'une onde incidente de la forme : $y_i(x,t)=f(t-\frac{x}{V_1})$ où f est une fonction quelconque.

- Montrer qu'en plus de l'onde incidente, il existe une onde réfléchie $y_r(x,t)$ du coté **$x<0$** et une onde transmise du côté $y_t(x,t)$.
- En utilisant les deux conditions de continuités, exprimer les deux expressions qui déterminent respectivement les coefficients de réflexion.