Mini projet -7

OBJECTIFS

1. Etude l'équation de mouvement de la corde vibrante
2. Les différentes solutions du problème
3. Etude l'analogie électrique avec la ligne de transmission
4. Application : **Impédance de la ligne**

Partie A : Equation de la corde vibrante :

Une corde Homogène et inextensible, de masse linéiqueμ, est tendue horizontalement suivant l'axe Ox avec une tension F constante, voire la figure 1

La corde, déplacée de sa position d'équilibre, acquiert un mouvement décrit à l'instant t par le déplacement quasi vertical $y(x, t)$, compté à partir de sa position d'équilibre, d'un point M d'abscisse x au repos.

A l'instant t, la tension $T(x,t)$ exercée par la partie de la corde à droite de M sur la partie de la corde à gauche de M, fait un petit angle $\theta(x,t)$avec l'horizontale.

On admettra θ petit, faible courbure de la corde, et on négligera les forces de pesanteur.

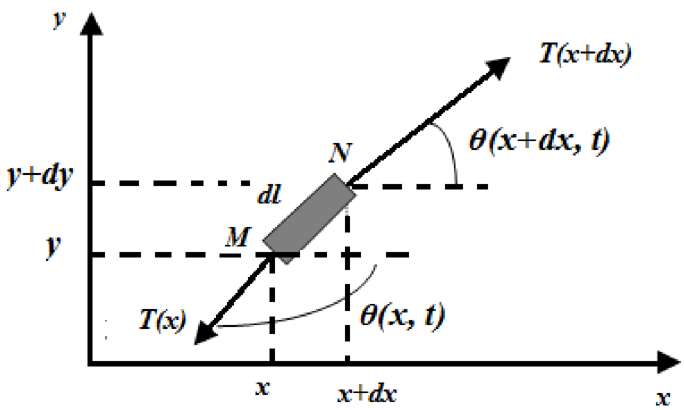

Figure 1: Mouvement de la corde

Equation des cordes vibrantes :

On considère le tronçon de la corde compris entre les abscisses $x, x + dx$.

- Etablir l'équation de propagation de l'onde de la corde vibrante.
- En déduire la célérité V de l'onde en fonction de μ *et* F.

Partie B : Analogie électrique :

Soit une tranche d'une ligne de transmission représentée par une cellule électrique sans perte dans la figure 2 comme suit :

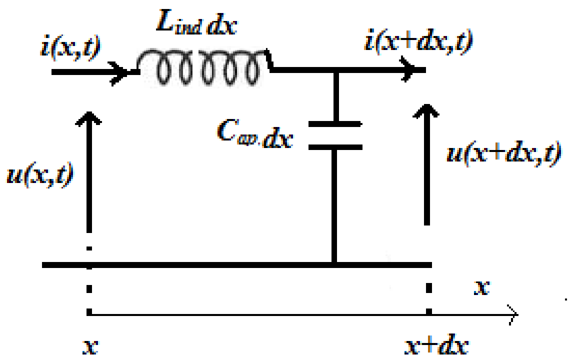

Figure 2: une tranche d'une cellule électrique sans perte

- Montrer que le courant *i(x, t)* et la tension *u(x, t)* obéissent à une même équation d'onde d'Alembert que l'on déterminera.
- Exprimer en fonction de L^*_{ind} et C^*_{ap} la célérité V de la propagation de l'onde de courant et de l'onde de tension sur cette ligne.

On admet qu'une onde progressive harmonique de courant se propage dans cette ligne, supposée infinie :

$$i(x,t) = i_0 \cos \omega (t - \frac{x}{V})$$

- Montrer qu'en tout point de la ligne, on a $u(x,t) = Z_c i(x,t)$ où l'impédance caractéristique Z_c est une constante qu'on exprimera en fonction de L^*_{ind} et C^*_{ap}.

La ligne, située dans l'espace $x<0$, s'étend jusqu'en $x=0$ où elle est fermée sur une résistance R. On alimente la ligne par une tension par tension sinusoïdale de pulsation ω L'onde de courant s'écrit alors sous la forme :

$$i(x,t) = (Ae^{-j\frac{\omega}{V}x} + Be^{+j\frac{\omega}{V}x})e^{j\omega t}$$

- Justifier cette écriture en notation complexe.
- Exprimer l'impédance $\tilde{Z}(x,t) = \dfrac{u(x,t)}{i(x,t)}$ de cette ligne. On fera apparaître Z_c dans l'expression de $Z(x)$.