

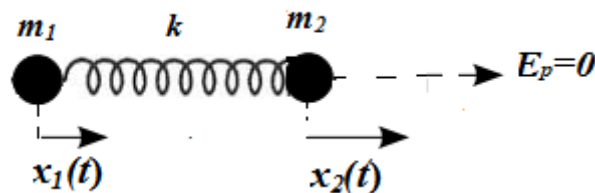
## Mini projet -5

### OBJECTIFS :

1. Le système différentiel couplé à plusieurs degrés de liberté
2. Les différentes solutions du problème
3. Application : **Molécules diatomique et triatomique**
4. Propagation d'onde mécanique dans la chaîne atomique

### Partie A :

Deux particules  $m_1$  et  $m_2$  ponctuelles, de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$ , sont reliées par un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ , la figure 1. Les deux masses, mobiles sans frottement sur une tige horizontale, sont écartées de leur position d'équilibre puis relâchées sans vitesse ; elles sont repérées à chaque instant  $t$  par les abscisses  $x_1(t)=GM_1$  et  $x_2(t)=GM_2$ , où  $G$  désigne le centre de masse des particules  $m_1$  et  $m_2$ .



**Figure 1 : Modélisation physique des oscillations d'une molécule diatomique**

- Etablir le Lagrangien du système.
- On pose la variable suivante :

$$X(t)=x_2(t)-x_1(t)$$

Déterminer l'équation différentielle du second ordre dont  $X(t)$  est la solution du système.

- Exprimer, en fonction de  $m_1$ ,  $m_2$  et  $k$ , la période  $T$  avec laquelle les masses oscillent l'une par rapport à l'autre.
- On suppose que deux masses couplées égales  $m_1=m_2=m=0.1\text{kg}$  oscillent avec une période de  $1\text{s}$ .

Calculer la raideur  $k$  du ressort de couplage.

- Le système étudié modélise les vibrations longitudinales d'une molécule diatomique d'oxyde de carbone **CO** dont la fréquence propre  $f_0$  est  $f_0=6.510^{13}Hz$ .

Calculer la constante de rappel  $k$  de la liaison carbone-oxygène.

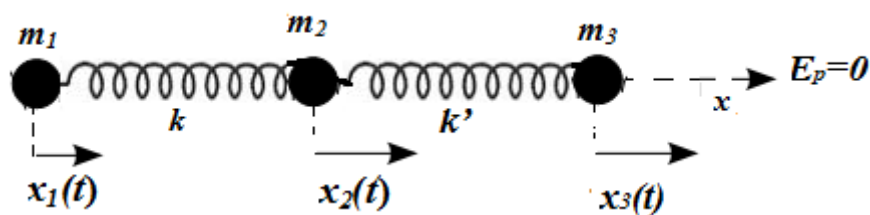
- **Application numérique :**

On donne : C = 12, O = 16 ; Nombre d'Avogadro  $N=6. 10^{23}$ .

**Partie B :**

On veut étudier maintenant les vibrations longitudinales d'une molécule triatomique linéaire **A-B-A'** représentée dans la figure 2. Les atomes **A, B, A'** ont pour masses respectives  $m_1, m_2, m_3$  ; on désignera  $x_1, x_2, x_3$  les déplacements des atomes **A, B, A'** à partir de leurs position d'équilibre. On suppose que chaque atome est rappelé à sa position d'équilibre par une force proportionnelle à l'écart, la constante de la force de rappel étant  $k$  pour la liaison **A-B** et  $k'$  pour la liaison **B-A'**.

On admettra que la molécule, dans son ensemble n'est pas animée par un mouvement de translation.



**Figure 2 : Modélisation physique des oscillations d'une molécule triatomique**

- Etablir le Lagrangien du système.
- Ecrire les équations différentielles du mouvement en  $x_1(t), x_2(t)$  et  $x_3(t)$ .
- Ecrire les équations différentielles du mouvement en  $X(t)$  et  $X'(t)$ , en effectuant le changement des variables suivantes :

$$X(t) = x_2(t) - x_1(t) \text{ et } X'(t) = x_2(t) - x_3(t).$$

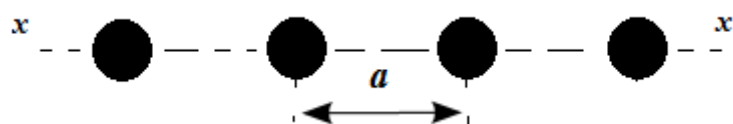
- Montrer que  $X(t)$  et  $X'(t)$  peuvent varier sinusoidalement avec le temps pour deux valeurs  $\omega_{01}$  et  $\omega_{02}$  de la pulsation propre qu'on déterminera en fonction de  $k, k', m_2$  et des pulsations fondamentales  $\omega_{p1}$  et  $\omega_{p2}$  de chacune des vibrations de valence des liaisons **A-B** et **B-A'** si elle était seule (en absence de l'interaction de couplage).
- **Applications numériques :**  
*Expérimentalement* on détermine les fréquences propres de la molécule linéaire d'acide cyanhydrique, soient  $\omega_{01} = 6,25 \cdot 10^{14} \text{ rd/s}$  et  $\omega_{02} = 3,9510^{14} \text{ rd/s}$ .  
 Calculer les fréquences fondamentales des liaisons **H-C** et **C≡N** sachant que ( $\omega_{C-H} > \omega_{C≡N}$ ).
- En déduire la constante la force de rappelle de la liaison **C-H** de la molécule étudiée et la comparer à celle de la liaison **C-H** des alcanes ( $k = 500 \text{ SI}$ ).

On considère maintenant que la molécule triatomique est symétrique, **A-B-A**, c'est-à-dire,  $k=k'$  et  $m_1=m_3$ .

- Quelles sont les expressions des pulsations propres en fonction de  $k, m_1$  et  $m_2$ . ?
- Donner un exemple concret qui vérifie ce modèle.

**Partie C**

On considère maintenant une chaîne linéaire à un atome par maille de côté  $a$ . La position au repos du  $n^{ième}$  atome de masse  $m$  est  $x = na$  comme le montre la figure 3.

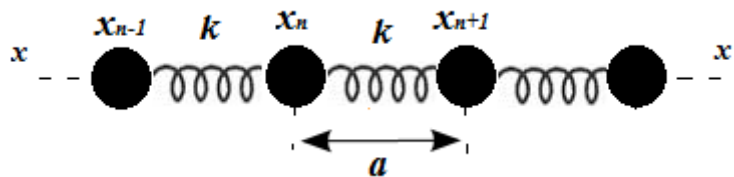


**Figure 3 : Chaîne d'atomes identiques**

Une onde mécanique longitudinale se propageant sans amortissement le long de l'axe  $Ox$  est caractérisée par :

$$Ae^{j(q^*x - \omega t)}$$

On modélise le mouvement des atomes par un potentiel harmonique de type  $\frac{1}{2}kx^2$  comme le montre la figure 4 avec  $k$  est la constante de rappel.



**Figure 4: Modèle physique équivalent de chaîne d'atomes identiques**

- Écrire l'équation du mouvement pour l'atome de rang  $n$ , en appelant  $x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$  les déplacements des atomes de rang  $n-1, n$  et  $n+1$ .
- On cherchera la solution de forme :

$$x_n = Ae^{j(q^*x_n - \omega t)}$$

- ❖ Déterminer la relation de dispersion  $\omega(q^*)$ .
- ❖ Tracer le graphe  $\omega(q^*)$ .
- ❖ En déduire la vitesse de la phase.
- ❖ Donner l'expression de la vitesse du groupe.
- Que peut-on dire sur la nature du milieu aux grandes longueurs d'onde.