Mini projet -3

OBJECTIFS :

1. L'équation différentielle d'un mouvement forcé
2. Les différentes solutions du problème
3. Le phénomène de résonance
4. Application pour « **un capteur d'amplitude** »

On définit un sismomètre comme un système physique appelé capteur qui comprend un support et une masse *m* relié par un ressort et un amortisseur disposés en parallèle, la figure 1. La masse, de centre de gravité *G*, ne peut se déplacer que verticalement. Le support, le ressort et l'amortisseur ont une masse négligeable.

Le ressort a une longueur à vide *l* et une rigidité *k*. La constante de frottement est α. On précise que si, les extrémités *A* et *B* d'un amortisseur appartenant à un système mécanique, décrivent un axe *Δ* parallèle à l'axe Ox avec des vitesses respectives v_a et v_b, l'amortisseur exercice sur le reste du système en point *A* une force $\alpha(v_b - v_a)\vec{i}$ et en point *B* une force $\alpha(v_a - v_a)\vec{i}$ où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire.

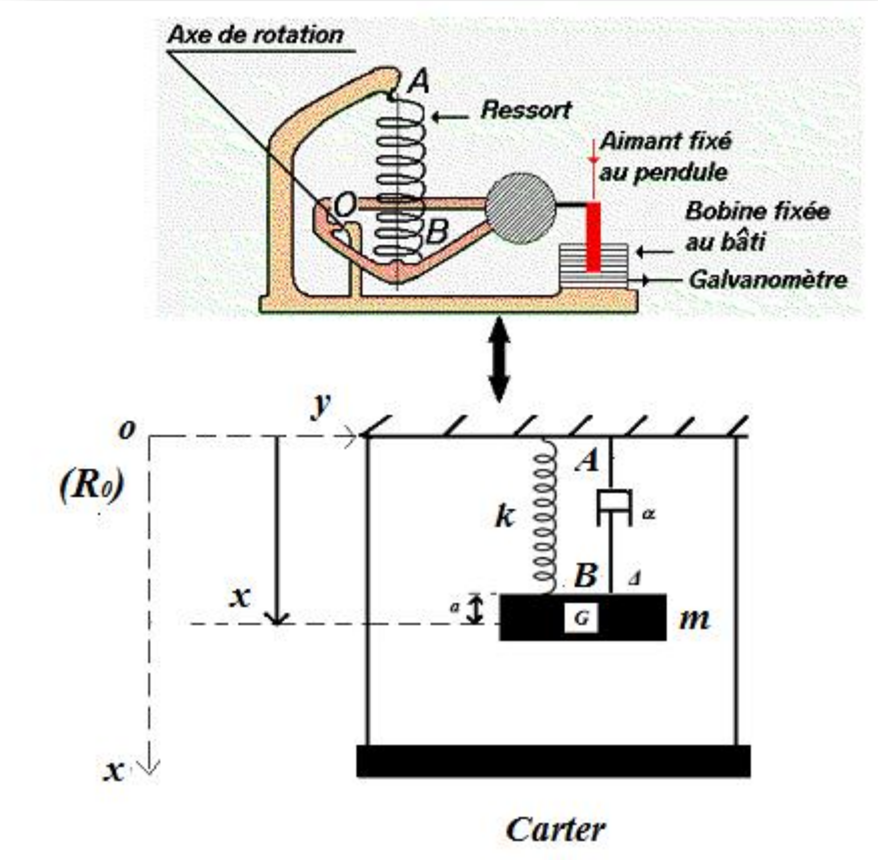

Figure 1 : Modélisation d'un sismomètre

Partie A :

Le support est immobile par rapport au repère *(R_0)*.

- Calculer l'abscisse x_0 du centre d'inertie de la masse en équilibre.
- Ecrire l'équation différentielle du mouvement de la masse écarté de sa position d'équilibre.
- Que devient cette équation quand on pose $x=x_0+X$.

On pose les constantes suivantes :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \ \alpha = \lambda f_C \text{ avec } f_c^2 = 4km.$$

Montrer que l'équation différentielle s'écrit sous la forme suivante :

$$\ddot{x} + \alpha^* \dot{x} + \beta^* x = 0$$

- Calculer α^* et β^* en fonction de λ et ω_0.
- On donne $\lambda = 0.5$, $\omega_0 = 10\ rad/s$. A l'instant initial, $X = 1\ cm$ et $\dot{X} = 0$.

  Déterminer X pour $t = 0.2s$.

Partie B :

On suppose maintenant que le support est solidaire du carter d'une machine animé d'un mouvement sinusoïdale verticale $x_1 = b \sin \omega t$ par rapport au repère (R_0), comme le montre la figure 2. On suppose que b est positif.

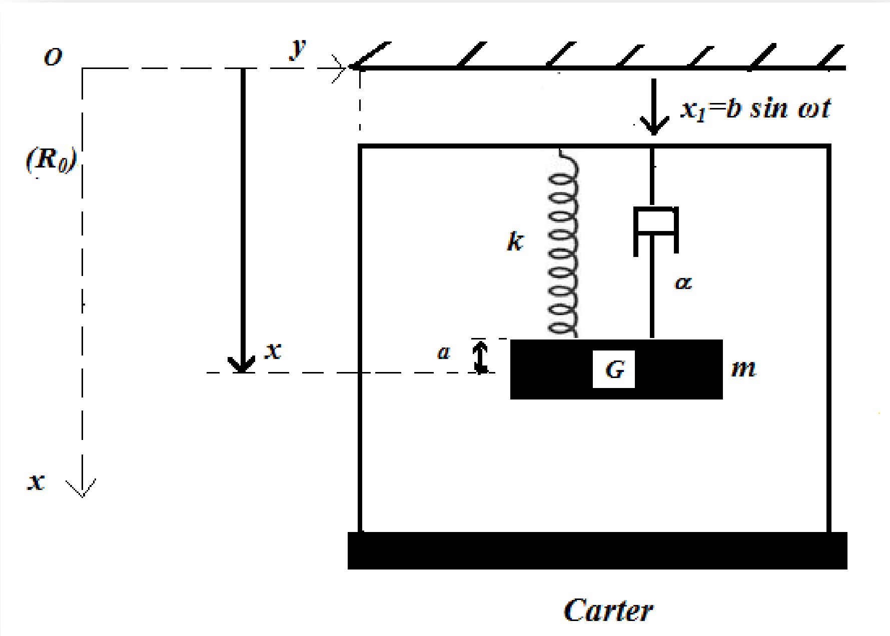

Figure 2 : Système est en mouvement forcé

- Ecrire l'équation de la masse par rapport à (R_0).
- Montrer que l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\ddot{x} + \alpha^* \dot{x} + \beta^* x = H \sin \omega t$$
$$Avec \quad x = X + C + b \sin \omega t$$

- Déterminer H et C, que représente X ?

- Etudier la solution en régime permanent

$$X(t) = B\sin(\omega t - \varphi)$$

  Avec B positif.

- Calculer le rapport $\frac{B}{b}$ et $\tan\varphi$ en fonction de λ et $\mu = \frac{\omega}{\omega_0}$.

- Tracer l'allure du graphe de B en fonction de μ tel que $B=f(\mu)$.

- On suppose que $\lambda=0.5$:

  Montrer que si μ est supérieur à une certaine valeur μ_1, $\frac{B}{b} - 1$ est inférieur à 10^{-2}. Calculer dans ce cas μ_1.

- En déduire une condition pour que l'appareil puisse fonctionner en capteur d'amplitude.