

## Mini projet -2

### OBJECTIFS :

1. L'équation différentielle d'un mouvement forcé
2. Les différentes solutions du problème
3. Le phénomène de résonance
4. Application en génie civil

Dans ce problème, on se propose d'étudier le comportement vibratoire de matériaux en caoutchouc afin de l'utiliser dans la construction, représenté dans la figure 1.

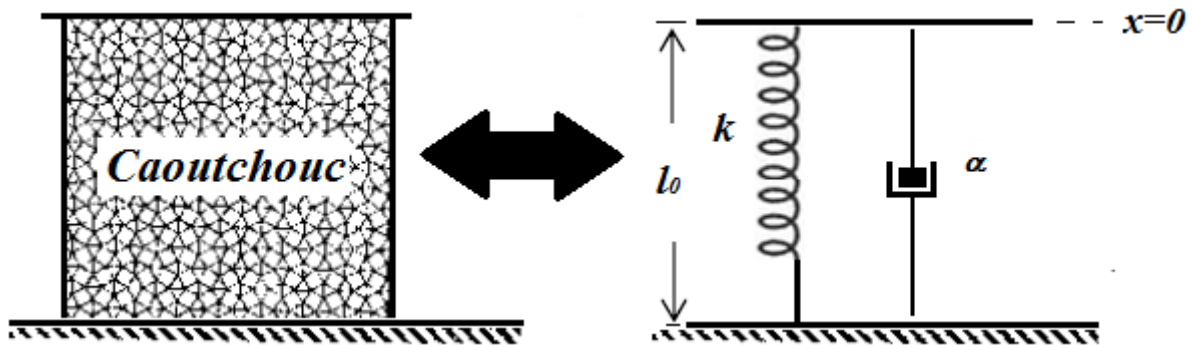
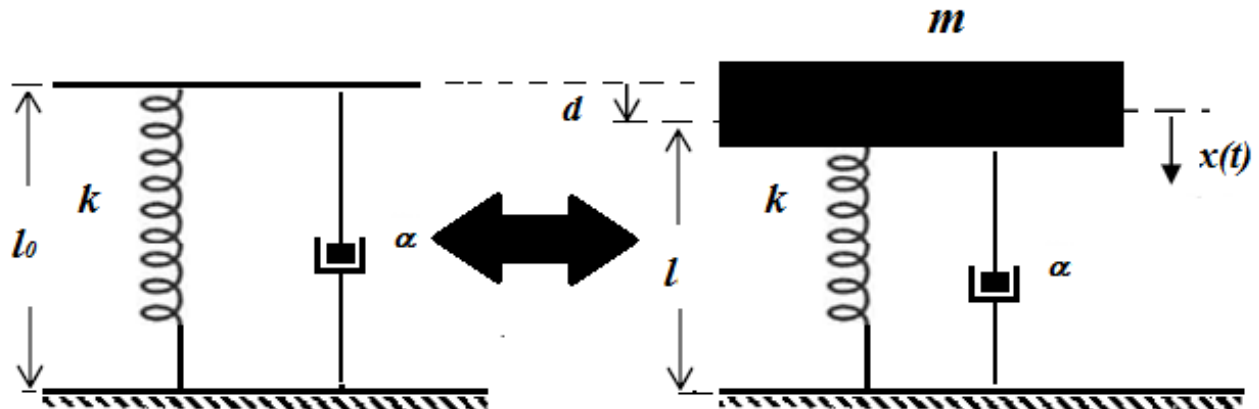


Figure 1: Modélisation physique du mouvement oscillatoire du caoutchouc

Nous assimilons l'élasticité du matériau à celle d'un ressort de raideur  $k$ , de longueur à vide  $l_0$  et les pertes énergétiques par frottement à celle ayant lieu dans un amortisseur de coefficient  $\alpha$ . Le ressort ainsi considérés sont associés en parallèle. On néglige le poids du caoutchouc devant les forces mise en jeu.

### Partie A :

On place un bloc de masse  $m=1t$  sur le caoutchouc qui se comprime d'une distance  $d$  et prend une valeur de  $l$ . Après une compression supplémentaire, on relâche le système oscillé autour de sa position d'équilibre qu'on le repère par la coordonnée  $x(t)$  comme le montre la figure 2



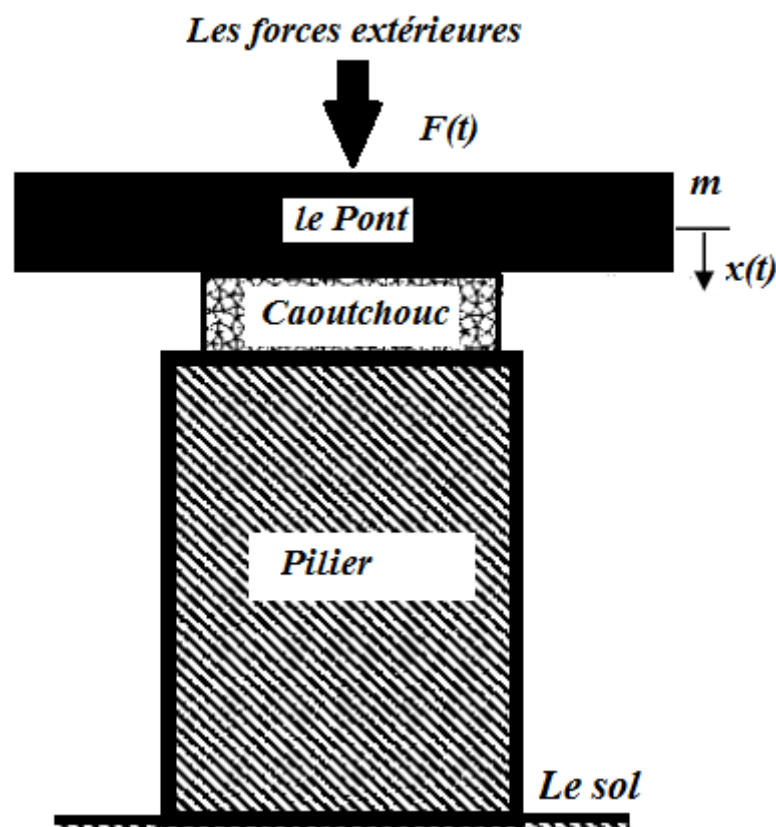
**Figure 2: Mouvement oscillatoire du « caoutchouc +le bloc »**

- Le système est en équilibre :
  - ✚ Déterminer l'énergie potentielle.
  - ✚ En déduire la compression  $d=l-l_0$ .
- Le système physique maintenant oscille.
  - ✚ Déterminer l'énergie cinétique.
  - ✚ En déduire le Lagrangien du système
- Etablir l'équation différentielle du mouvement de la masse  $m$
- Donner la solution générale de la solution  $x(t)$  sachant que le mouvement a un mouvement oscillatoire amorti.
- Donner l'expression du décrétement logarithmique  $\delta$ .  
 L'intervalle de temps,  $\Delta t=0.2s$  qui sépare le premier et le sixième maximum.  
 Correspond à la diminution d'amplitude de 60%.  
 Déterminer les valeurs de  $k$  et  $\alpha$ .
- On refait la même expérience avec un autre caoutchouc. On trouve  $\alpha'=4.510^3\text{Kg/s}$ . Au bout de combien de temps,  $\Delta t'$ , obtient-on la même diminution d'amplitude que dans l'expérience précédente ?
- Quel est le matériau le plus adéquat pour la construction ?

**Partie B :**

On prend dans cette partie un caoutchouc de caractéristiques physiques suivantes :  $k=2510^6 N/m$  et  $\alpha=10^4 Kg/s$  qui sera utilisé dans la construction d'un pont d'autoroute, de masse  $m=12.5t$ .

On assimile l'effet du passage des véhicules sur le pont à celui d'une force sinusoïdale  $F(t)$  d'amplitude  $F_0=10kN$  et de pulsation  $\omega$ , appliquée perpendiculairement au pont comme le montre la figure 3



**Figure 3 : Modélisation physique du mouvement du pont**

- Etablir le Lagrangien du système.
- Exprimer l'équation différentielle du mouvement du pont pour la coordonnée  $x(t)$  donnant son déplacement par rapport à l'état d'équilibre.
- Déterminer l'expression de la solution  $x(t)$  en régime permanent.

- Déterminer la fréquence de résonance  $f_r$
- Donner l'expression de l'amplitude maximale à laquelle le pont peut vibrer.
- Quelle est la phase correspondante dans ce cas-là ?
- Calculer l'énergie communiquée au pont pendant un intervalle de temps égale à une période, lorsque le passage des véhicules le fait vibrer à la fréquence de résonance.
- Déterminer l'énergie dissipée par la force de frottement pendant la même période.  
Interpréter le résultat.