1ière Partie: VIBRATIONS

Chapitre 4: Mouvement forcé à un degré de liberté

Dr Fouad BOUKLI HACENE

EPST TLEMCEN

ANNÉE 2015-2016

Objectifs:

1. L'équation différentielle d'un mouvement Forcé
2. Les différentes solutions du problème
3. Le phénomène de résonance
4. Quelques applications

❑ Définitions:

- ❖ Les **vibrations mécaniques** sont à l'origine d'une grande partie des problèmes industriels.
- ❖ Ces vibrations sont symbolisées par un ensemble **d'oscillateurs** constitués de **masse** ; de **ressorts** et d'**amortisseurs**.
- ❖ On **définit alors une oscillation forcée**, tout système en mouvement **sous l'action d'une force extérieure**,

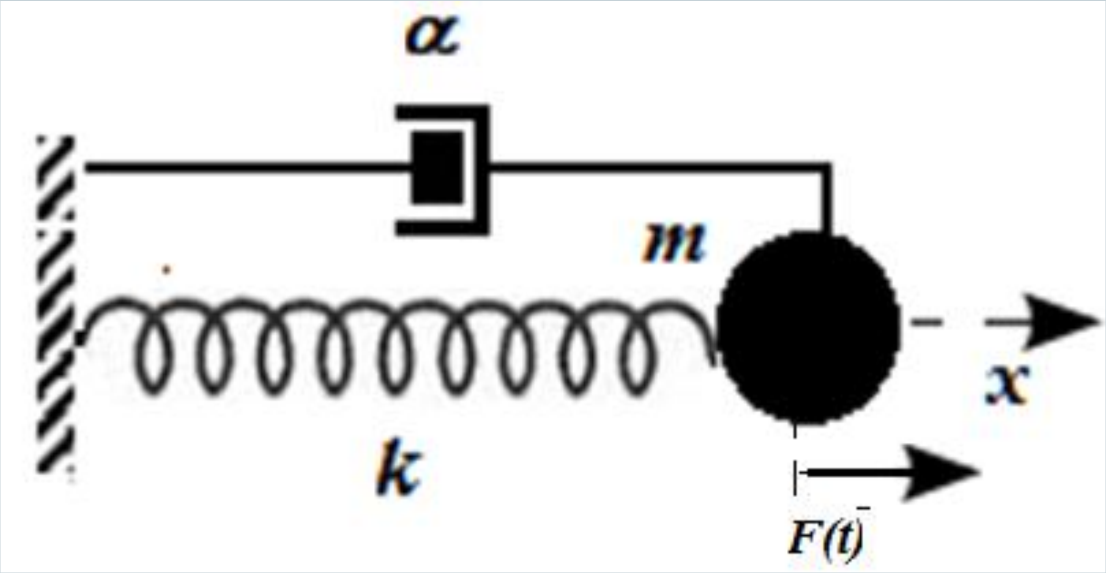


Figure 1 .4 : Schéma d'un mouvement forcé

Modélisation mathématiques:

- ✓ On calcule le **Lagrangien pour le système forcé comme suit:**

$$L(x,\dot{x}) = E_c - E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

- ✓ **<u>L'équation de mouvement</u>** est de la forme:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\alpha.\dot{x} + F(t)$$

Avec:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

✓ **Finalement, on obtient L'équation de mouvement comme suit:**

$$m\ddot{x}+kx=-\alpha.\dot{x}+F(t)$$

$$m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+kx=F(t)$$

✓ **C'est une équation différentielle linéaire inhomogène avec second membre,**

✓ **Elle admet deux solutions:**

- **Une solution générale et**
- **Une solution particulière**

❖ Le <u>**mouvement forcé**</u> est exprimé en **présence de la force de frottement visqueuse** comme suit:

$$\ddot{q}(t) + 2\xi\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = \frac{F(t)}{m}$$

Avec:

$$2\xi = \frac{\alpha}{m} \qquad et \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Où *F(t)* est appelée la **fonction excitation extérieure**.

ξ, ω_0 :sont <u>**respectivement**</u> le **facteur d'amortissement** et **la pulsation propre** du système

- La solution ***q(t)*** de l'équation différentielle ; **représente la réponse du système face à l'action extérieure**, qui est calculée par la somme de deux thermes:

$$q(t) = q_g(t) + q_p(t)$$

Où $q_g(t)$ et $q_p(t)$ représentent respectivement la **solution générale et la solution particulière** de l'équation différentielle,

- Il faut signaler qu'au **début du mouvement** ***q****(t)* **représente le régime transitoire**.
- **Au fil du temps** la solution homogène devient négligeable devant la solution particulière ; à ce moment on a: **le régime permanent**.
- Ainsi, la **solution totale** dans ce cas, sera de la forme suivante:

$$q(t) = q_p(t)$$

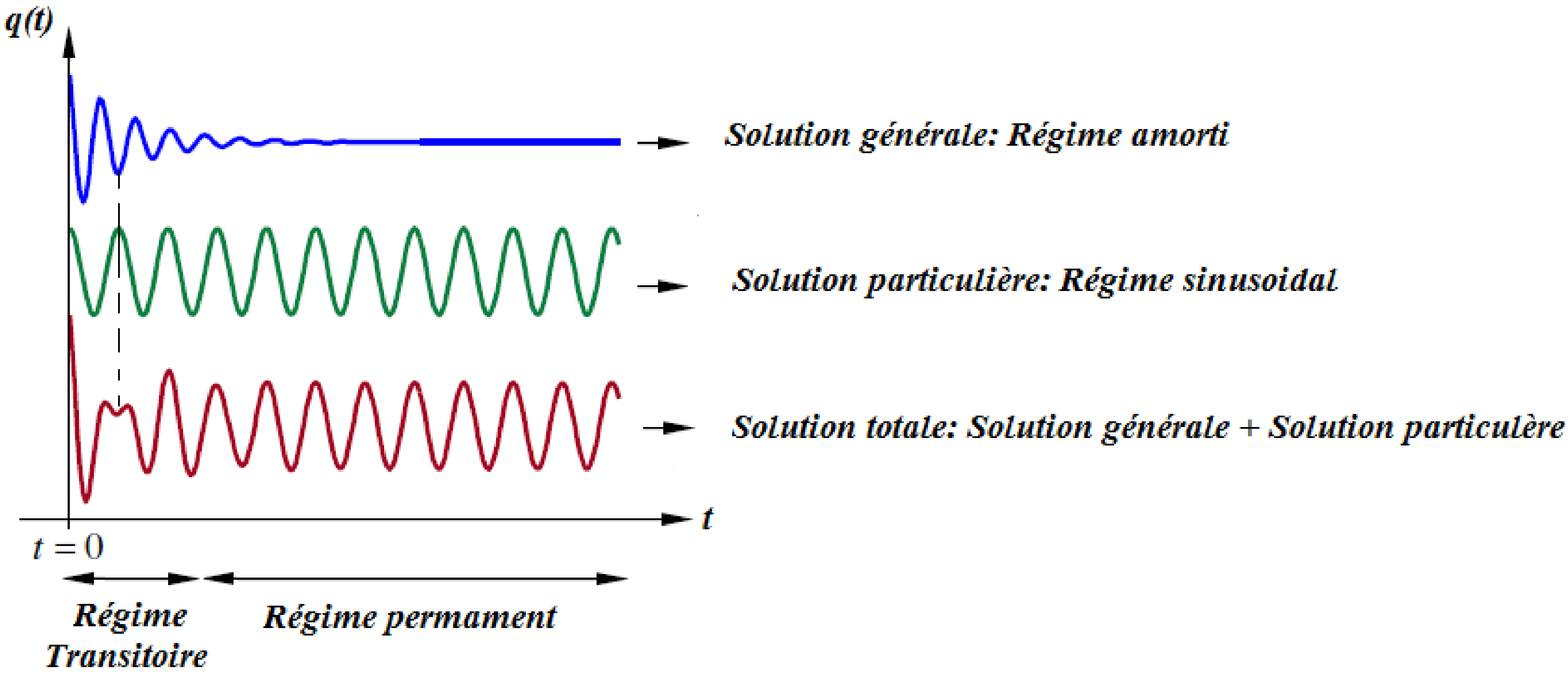


Figure 2.4 : Superposition du régime transitoire et du régime permanent

❖ Résolution:

✓ Dans le cas où l'excitation est sinusoïdale de type:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t = \mathrm{Re}(F_0 e^{j\omega t})$$

✓ La solution totale s'écrit alors comme suit:

$$q(t) = q_p(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$$

Où la constante A représente l'amplitude de la solution totale et φ le déphasage.

✓ On cherche la solution de l'équation différentielle sous forme complexe :

$$q(t) = q_p(t) = \mathrm{Re}(Ae^{j(\Omega t + \varphi)})$$

Avec

$$\dot{q}(t) = j\Omega A e^{j(\Omega t+\varphi)}$$

$$\ddot{q}(t) = -\Omega^2 A e^{j(\omega t+\varphi)}$$

Alors: **l'amplitude s'écrit sous la forme complexe** comme suit:

$$A e^{j\varphi} = \frac{F_0}{-\Omega^2 + \omega_0^2 + 2\xi j\Omega}$$

- **En module**

$$\left|A(\Omega)\right| = \frac{F_0}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2}}$$

- **En phase**

$$\varphi = Artg\,\frac{2\xi\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

✓ L'étude **des variations du module de l'amplitude** se fait par:

$$\left.\frac{d\left|A(\Omega)\right|}{d\Omega}\right|_{\Omega} = 0$$

A cet effet on étudie les variations de la fonction *h(Ω)* :

$$\left.\frac{dh(\Omega)}{d\Omega}\right|_{\Omega} = 0 \qquad avec \quad h(\Omega) = (\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2$$

Avec :

$$\left.\frac{dh(\Omega)}{d\Omega}\right|_{\Omega} = 4\Omega(\Omega^2 - \omega_0^2) + 8\xi^2\Omega$$

✓ On obtient ainsi, **deux pulsations**:

$$\Omega_{01} = 0$$

$$\Omega_{02} = \Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\xi^2}$$

✓ Après ; on calcule la deuxième dérivée de la fonction *h(Ω)*; on obtient:

$$\left.\frac{d^2h(\Omega)}{d\Omega}\right|_{\Omega} = 4(\Omega^2-\omega_0^2)+8\Omega^2+8\xi^2 = 12\Omega^2-4(\omega_0^2-2\xi^2)$$

✓ On étudie le signe de la deuxième dérivée pour déterminer le maximum et le minimum,

- Pour **la première pulsation** $\Omega=\Omega_{01}$ on a:

$$h^{''}(\Omega_{01}) \prec 0 \qquad \Rightarrow \quad A(\Omega_{01}) \succ 0$$

D'où la pulsation $\Omega=\Omega_{01}$ présente un minimum pour l'amplitude *A,*

- Pour **la deuxième pulsation** $\Omega=\Omega_{02}$ on a :

$$h^{''}(\Omega_{01}) \succ 0 \qquad \Rightarrow \quad A(\Omega_{01}) \prec 0$$

D'où la pulsation $\Omega=\Omega_{02}$ présente un maximum pour l'amplitude *A*

- ✓ Donc pour la pulsation $\Omega=\Omega_{02}$ $=\Omega_r$ on obtient la **réponse maximale du système**.
- ✓ On a dans ce cas **le phénomène de résonnance**.

- ✓ A la **fréquence de résonnance** l'amplitude s'exprime comme suit:

$$\left|A(\Omega_r)\right|_{\max} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\Omega_r^2-\omega_0^2)^2+4\xi^2\Omega_r^2}}$$

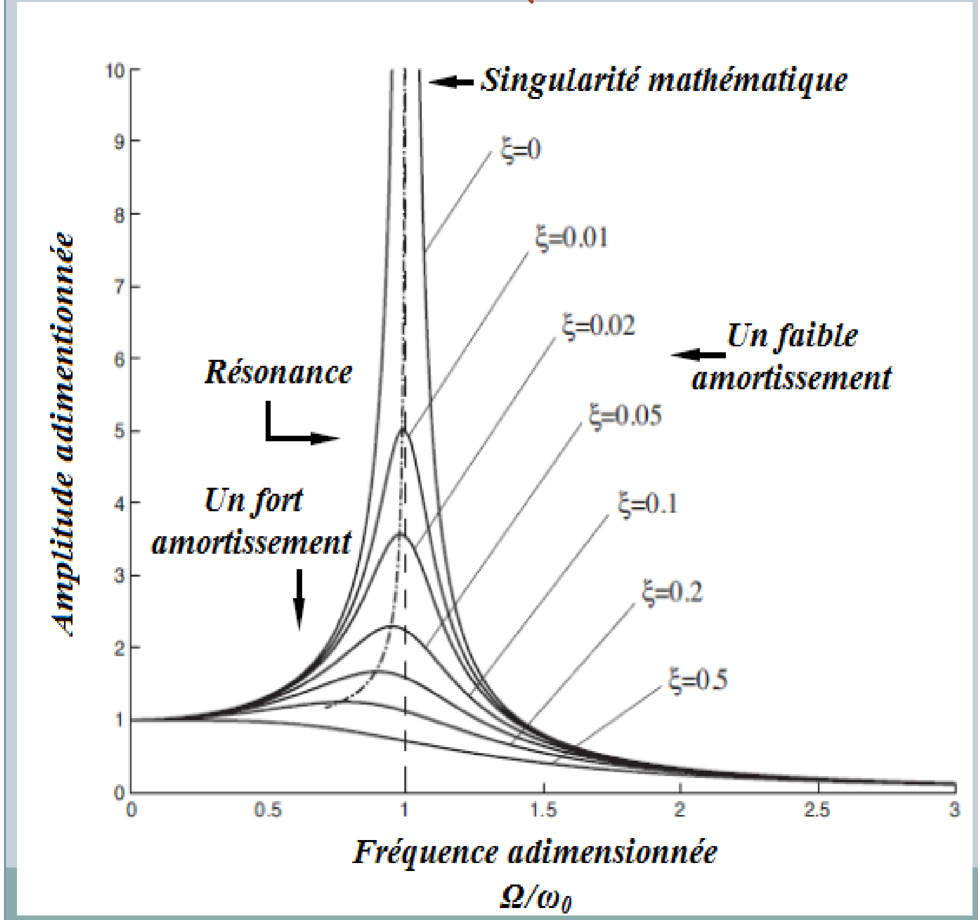
D'où

$$\left|A(\Omega_r)\right|_{\max} = \frac{\frac{F_0}{m}}{2\xi\sqrt{\omega_0^2-\xi^2}} \approx \frac{F_0}{\alpha\sqrt{\omega_0^2-\xi^2}}$$

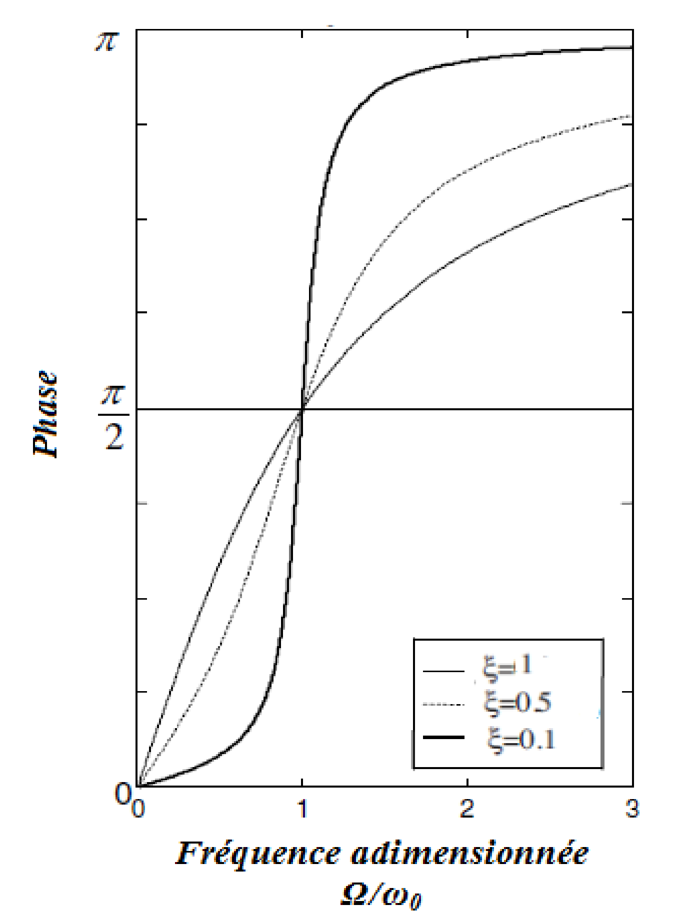
- ✓ Pour des très **faibles amortissements ;** l'amplitude maximale est égale à :

$$\left|A(\Omega_r)\right|_{\max} \approx \frac{F_0}{\alpha\omega_0} \qquad avec \quad \xi \prec\prec \omega_0$$

- ✓ La figure 3.4 **illustre la variation du rapport de l'amplitude en fonction du rapport de la fréquence pour différentes valeur de** ξ



- ✓ La figure 4.4 **représente la variation de la phase en fonction du rapport de la fréquence pour différents valeurs de** ξ



✓ On définit aussi :

- La **largeur de la bande passante** $\Delta\Omega$

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$$

Où Ω_1 , Ω_2 sont des pulsations déduites par l'intersection de la courbe de l'amplitude de la réponse du système $A(\Omega)$ et la droite $\frac{A_{\max}(\Omega_r)}{\sqrt{2}}$

- **Le facteur de qualité** Q pour un faible amortissement:

$$Q = \frac{\Omega_r}{\Omega_2 - \Omega_1}$$

✓ **Pour des Oscillations électriques:**

On considère le circuit oscillant R.L.C alimenté par une source de tension sinusoïdale *U(t)* tel que :

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t}$$

La figure 5.4 illustre le schéma du circuit oscillant R.L.C en série alimenté par une source de tension *U(t)* :

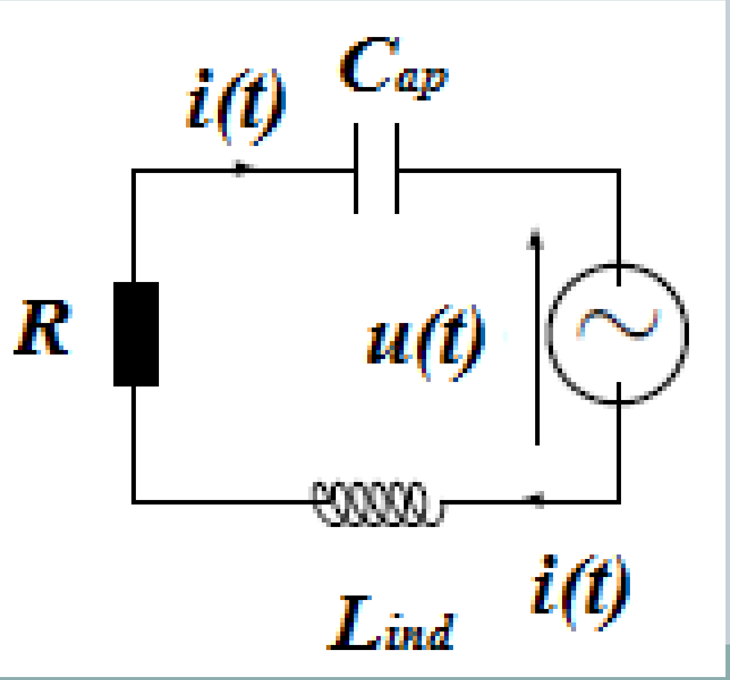


Figure 5.4 : Circuit oscillant R.L.C alimenté par Une source de tension extérieure

- Le bilan des tensions s'écrit :

$$L_{ind}\frac{di(t)}{dt}+\frac{q(t)}{C_{ap}}+Ri(t)=U(t)$$

Sachant que le courant *i(t)* pendant un temps *dt* apporte une charge tel que :

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$$

On obtient alors l'équation différentielle du mouvement comme suit :

$$L\ddot{q}(t)+R\dot{q}(t)+\frac{q(t)}{C}=U(t)$$

On remarque que cette équation est équivalente à l'équation d'un mouvement oscillatoire forcé comme suit

$$\ddot{q}(t)+\frac{R}{L}\dot{q}(t)+\frac{q(t)}{LC}=\frac{U(t)}{L} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x}(t)+\frac{\alpha}{m}\dot{x}(t)+\frac{k}{m}x(t)=\frac{F(t)}{m}$$

- On peut conclure que l'**<u>analogie</u>** entre **le système mécanique** et **le système électrique** est de la forme suivante:

$$\begin{cases} L_{ind} & \Leftrightarrow & m \\ q(t) & \Leftrightarrow & x(t) \\ \dfrac{1}{c_{ap}} & \Leftrightarrow & k \end{cases} \quad et \quad \begin{matrix} R & \Leftrightarrow & \alpha \\ U(t) & \Leftrightarrow & F(t) \end{matrix}$$

- Dans le cas **d'une excitation *F(t)* quelconque** mais **<u>périodique de période *T*</u>**. Elle peut s'écrire sous la forme **de série de Fourier** comme suit :

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t\right] \quad avec \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

Où les coefficients sont déterminés comme suit:

$$\begin{cases} a_{,0} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T F(t)dt \\ a_{,n} = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T F(t)\cos n\Omega t dt \\ et \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_T^T F(t)\sin \Omega t dt \end{cases}$$

Application technique:

- On considère un système de réception radio modélisé par un circuit R, L_{ind}, C_{ap} en série et alimenté par une source de tension sinusoïdale d'intensité:

$$u(t) = u_0 \cos \omega t$$

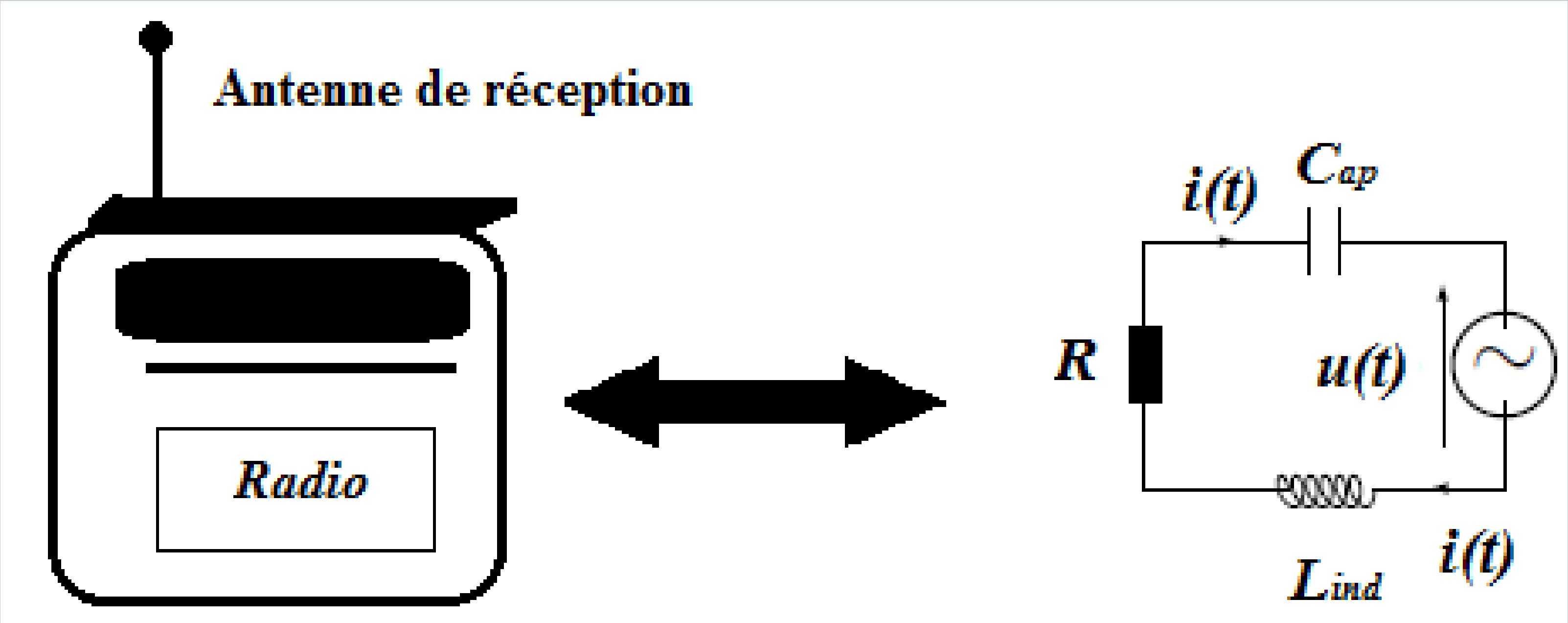


Figure 12.4 : Circuit R.L.C en série

✓ Le **circuit est en série**, on peut le schématiser comme suit :

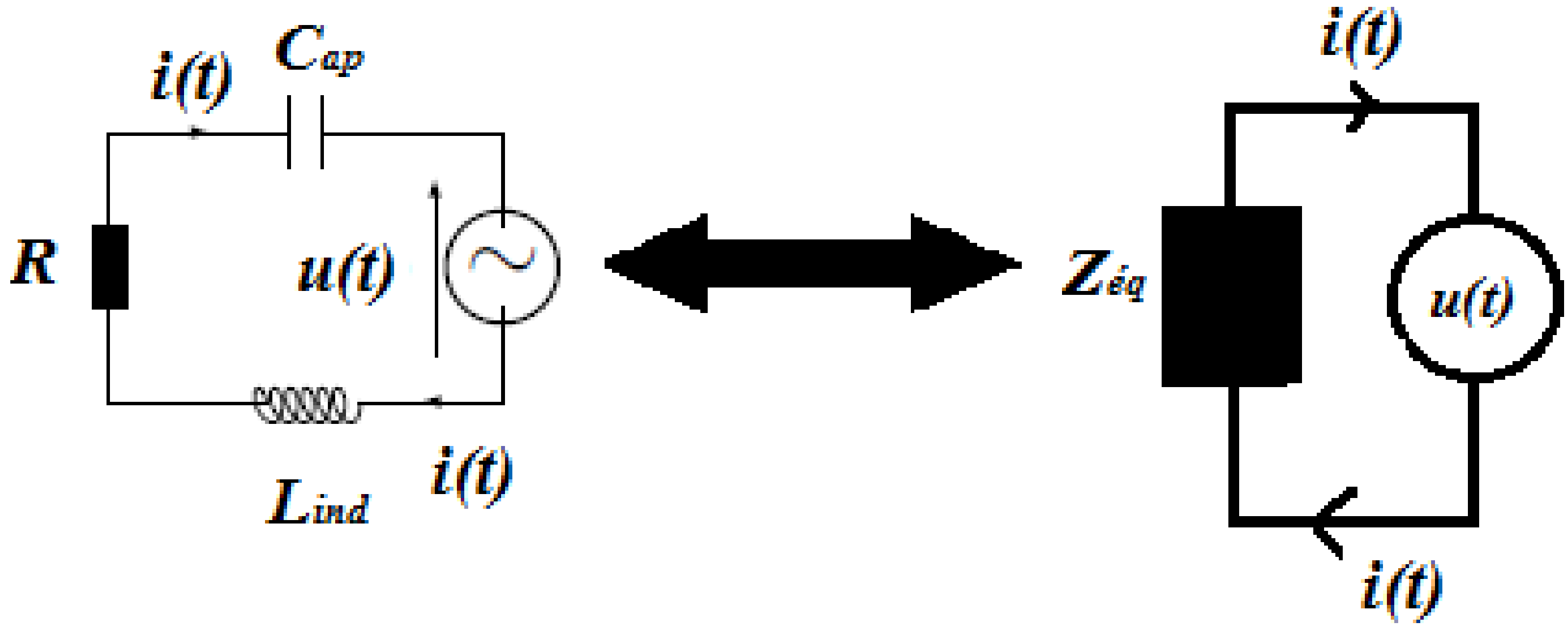


Figure 13.4 : Circuit *R,L,C* équivalent en série

✓ **L'impédance équivalente** totale est égale :

$$\widetilde{Z}_{éq} = R + j\left(L_{ind}\omega - \frac{1}{C_{ap}\omega}\right)$$

✓ Le **module du courant** s'écrit:

$$I_0(\omega) = \frac{|u(t)|}{|\tilde{Z}_{éq}|} = \frac{u_0}{\sqrt{R^2 + (L_{ind}\omega - \frac{1}{C_{ap}\omega})^2}}$$

✓ Le **module du courant est maximum** pour la valeur de:

$$I_{0\,max} = \frac{u_0}{R}$$

$$\Downarrow$$

$$L_{ind}\omega - \frac{1}{C_{ap}\omega} = 0$$

On obtient alors la valeur
de la **pulsation correspondante**: $\Rightarrow$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_{ind}C_{ap}}} = \omega_0$$

ω_r :est appelée la **pulsation de résonance** qui ne dépend que de l'**inductance** et de la **capacité**

- ✓ La **bande passante** est définit:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

ω_2 , ω_1 Sont déterminées en résolvant **l'équation paramétrique** suivante:

$$\frac{|I_{0max}|}{|\sqrt{2}|} = \frac{u_0}{\sqrt{R^2 + (L_{ind}\omega - \frac{1}{C_{ap}\omega})^2}}$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L_{ind}}$$

✓ **Le facteur de qualité** s'écrit:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{L_{ind}\,\omega_0}{R}$$

✓ Remarques:

- ✓ On constate que la **fréquence de résonnance ne dépend pas de la résistance R,**
- ✓ Par contre **la bande passante** et le **facteur de qualité** varient en **fonction de la résistance**,
- ✓ Pour une **bonne application technique du système**, c'est-à-dire **<u>avoir une très bonne réception du signal</u>**; il faut que **la résistance du circuit soit faible**

Effet POGO:

- **L'effet POGO** est, en **mécanique des structures**, un **phénomène oscillatoire longitudinal instable** qui peut se produire dans les étages à ergols liquides d'un lanceur, générant des chocs pouvant détruire le lanceur ou sa charge.
- Cet effet est provoqué par des **fluctuations de poussée** du moteur, qui engendrent des **vibrations de structure** et des **colonnes du carburant liquide**, qui à leur tour se répercutent sur l'alimentation du moteur.
- Lorsque ce cycle de perturbations **entre en résonance**, les oscillations augmentent et **peuvent détruire les structures**. Le nom provient du jeu appelé POGO-stick.
- Cet effet **détruisit plusieurs fusées et satellites**!!!!!

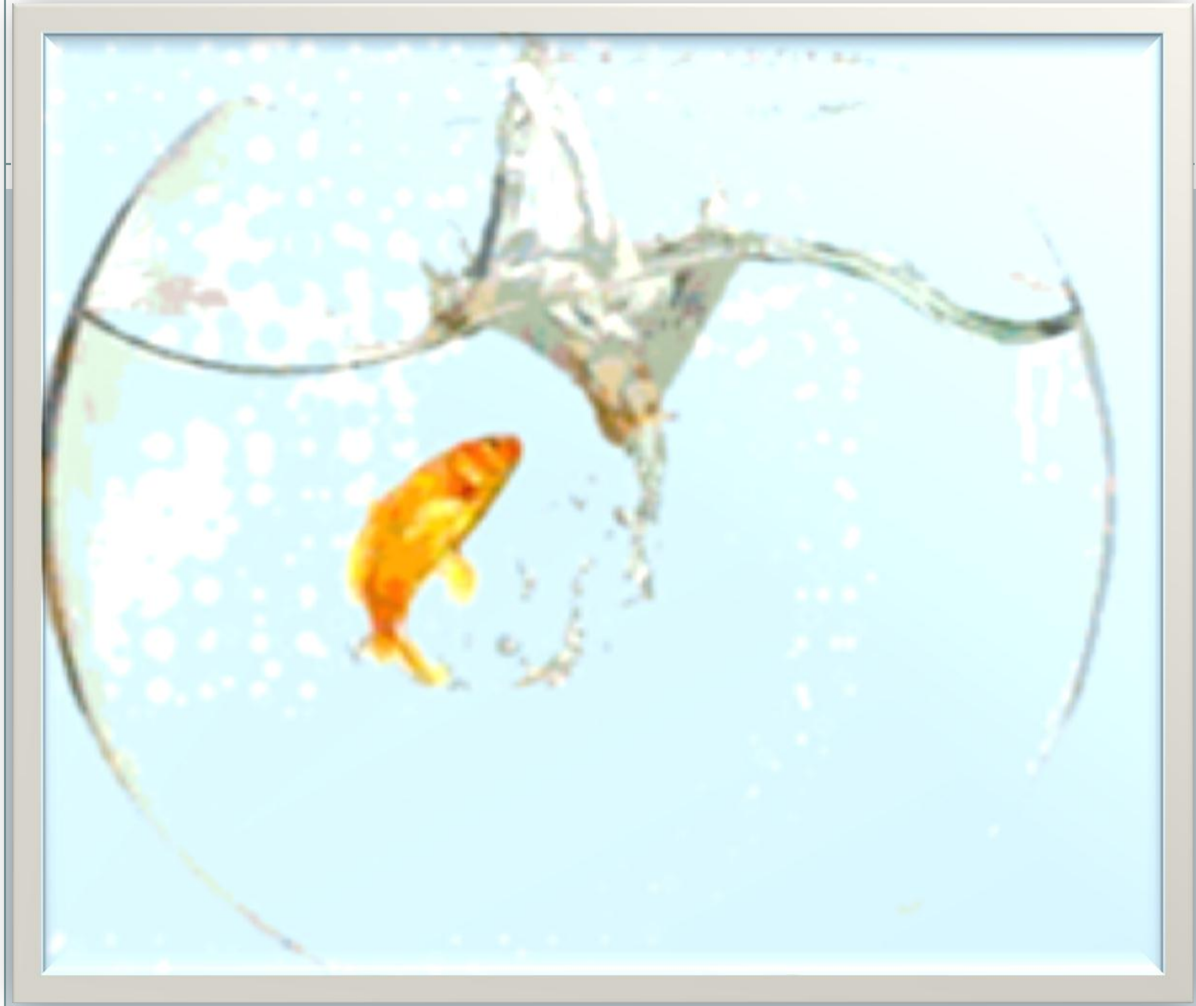


Figure 7.4 : Mécanisme rencontré dans un réservoir de liquide Soumis à des vibrations

Figure 6.4 : Le jouet POGO-Stick

- Considérons le **système mécanique** suivant:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

$$x(0) = x_0 \qquad et \qquad \dot{x}(0) = v_0$$

Sachant que *F(t)* représente l'excitation permanente et (x_0 ; v_0) représentent les conditions initiales en position et en vitesse.

- Pour **<u>une excitation permanente de forme sinusoïdale</u>** ; on a:

$$F(t) = F_0 \sin \Omega t$$

- La **<u>solution de l'équation différentielle</u>** est de la forme:

$$x(t) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\left|\Omega^2 - \omega_0^2\right|} \sin \omega t$$

- On remarque que **la solution prend une valeur infinie** lorsque $\boldsymbol{\Omega=\omega_0}$ d'où l'apparition **du phénomène de résonance de POGO**

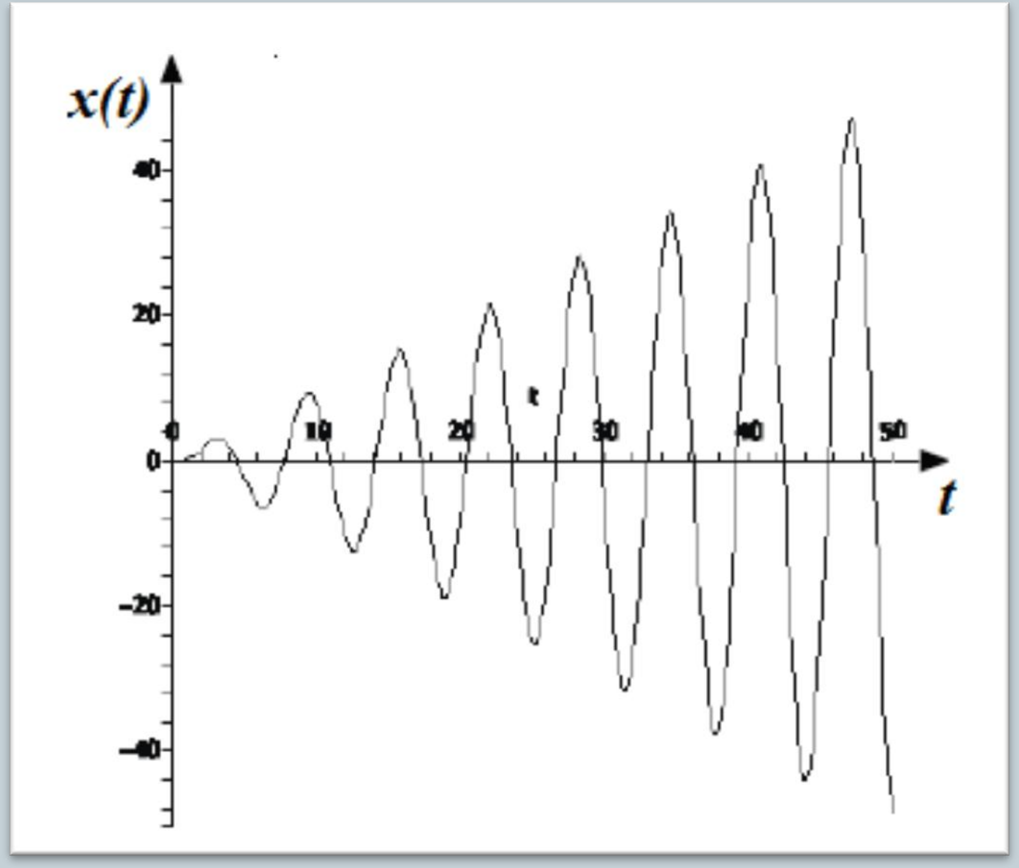


Figure 8.4 : Evolution temporelle de *x(t)*

❖ Autres Exemples:

On peut citer un autre exemple du phénomène de résonnance. Il s'agit **d'un ventilateur accroché au plafond** d'une pièce tournant à une vitesse de rotation ω_0. Il apparaitra dans ce cas **le phénomène de résonance si le mode propre des vibrations du plafond est très proche de la pulsation ω_0** ; et se traduira par **un bruit désagréable**.

❑ Ce qu'il faut retenir!

- **L'oscillation forcé dans le cas général** est régie par l'équation différentielle:

$$\ddot{q}(t) + 2\xi\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = \frac{F(t)}{m}$$

- Il existe **deux régimes** :
  - ❖ **Le régime transitoire** :
    La solution totale du système est: $q(t) = q_g(t) + q_p(t)$

$q_g(t), q_p(t)$ représentent respectivement **la solution générale la solution particulière**

  - ❖ **Le régime permanent** :
    Caractérisé par **le phénomène** : **« La résonance »**

    la solution du système est de la forme: $q(t) = q_p(t)$

- Il faut signaler que **la force extérieure absorbe les pertes du système due aux forces de frottements,**