$1^{ière}$ Partie: VIBRATIONS

Chapitre 3: Mouvement amorti à un degré de liberté

Dr Fouad BOUKLI HACENE

EPST TLEMCEN

ANNÉE 2015-2016

Objectifs:

1. L’équation différentielle d’un mouvement amorti
2. Les différentes solutions du problème
3. L’aspect énergétique

❑ Définitions:

- En réalité tous les **systèmes physiques interagissent** avec le **milieu environnant**.
- Dans ce chapitre on doit tenir compte de **l'influence de la force de frottement visqueuse proportionnelle à la vitesse des oscillations** du système de la forme:

$$\vec{F}_{fr} = -\alpha\vec{v}$$

Où ***α est le coefficient de frottement et v est la vitesse du mobile***

- C'est une bonne description dans le **régime de faibles vitesses**.
- Au-delà ; la force devient progressivement proportionnelle au carré de la vitesse.
- Ce type de mouvement est appelé **mouvement amorti**.

❖ Pour un **système mécanique amorti** est représenté par un ressort avec une masse régie par un amortisseur; comme suit :

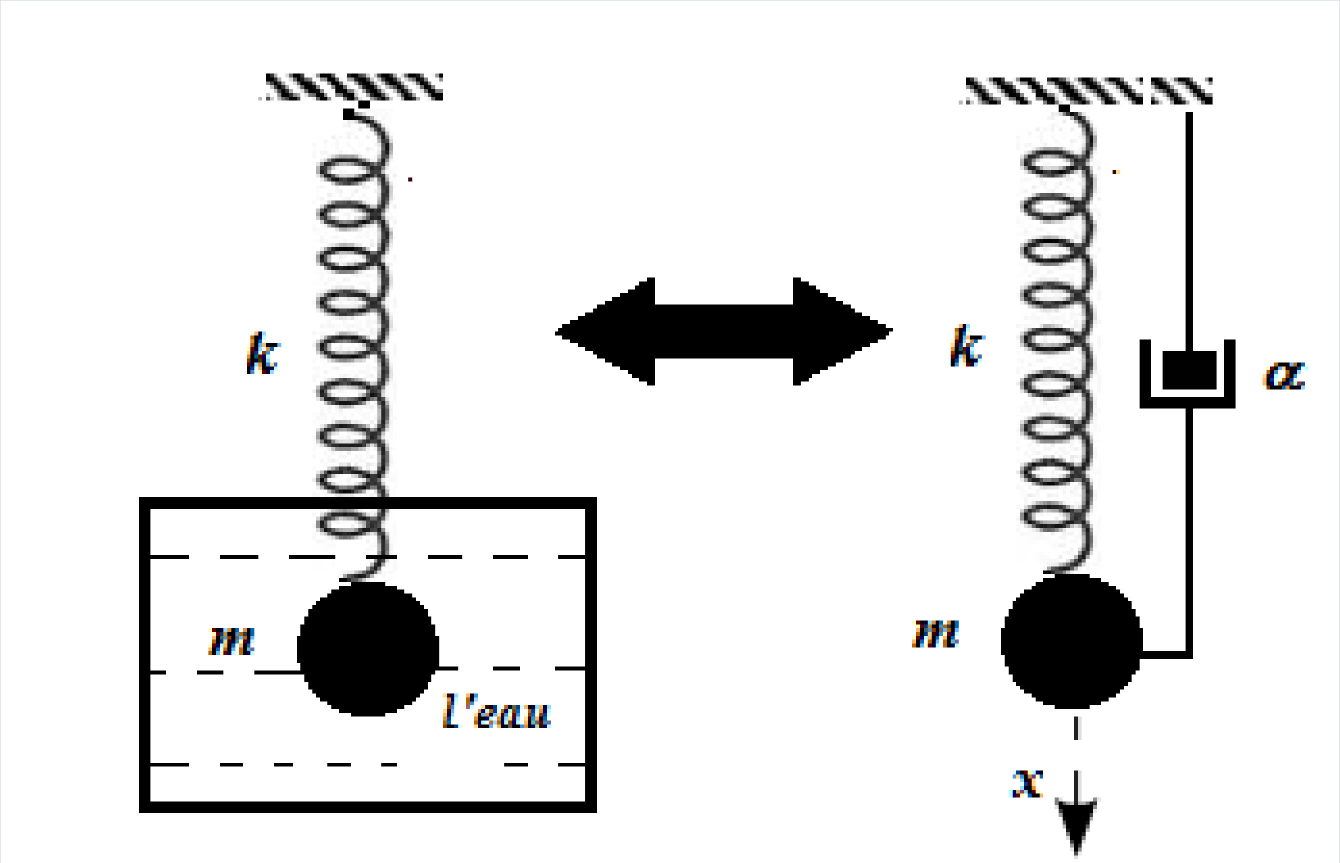


Figure 1 .3 : Schéma d'un amortisseur mécanique

❑ Modélisation mathématiques :

- On calcule le **Lagrangien pour le système amorti comme suit:**

$$L(x,\dot{x}) = E_c - E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

- **<u>L'équation de mouvement</u>** est de la forme:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\alpha.\dot{x} \qquad avec \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$m\ddot{x} + kx = -\alpha.\dot{x} \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

- On définit alors, **l'oscillation amorti** comme suit

$$\ddot{q}(t) + 2\xi\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$$

Avec les **constantes suivantes**:

$$2\xi = \frac{\alpha}{m} \qquad et \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Où ξ est un coefficient positif et est appelé **facteur d'amortissement**

ω_0 :est appelée la **pulsation propre** du mouvement

- La **résolution** de cette équation se fait par le changement de variable, l'équation devient alors:

$$r^2 + 2\xi r + \omega_0^2 = 0$$

- On calcule le discriminant Δ' et on obtient:

$$\Delta' = \xi^2 - \omega_0^2$$

- Il existe **<u>trois types de solutions</u>** selon le signe de Δ'

❖ **Cas où le système est fortement amorti** :

On a:

$$\Delta' \succ 0 \Rightarrow \xi \succ \omega_0$$

✓ La **solution de l'équation différentielle** s'écrit comme suit:

$$q(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

$$r_{1,2} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - \omega_0^2}$$

Où A_1 et A_2 sont coefficients à déterminer par les conditions initiales

$$\begin{cases} q(t=0) = q_0 \\ \dot{q}(t=0) = \dot{q}_0 \end{cases}$$

✓ On dit que le système a un **mouvement apériodique**

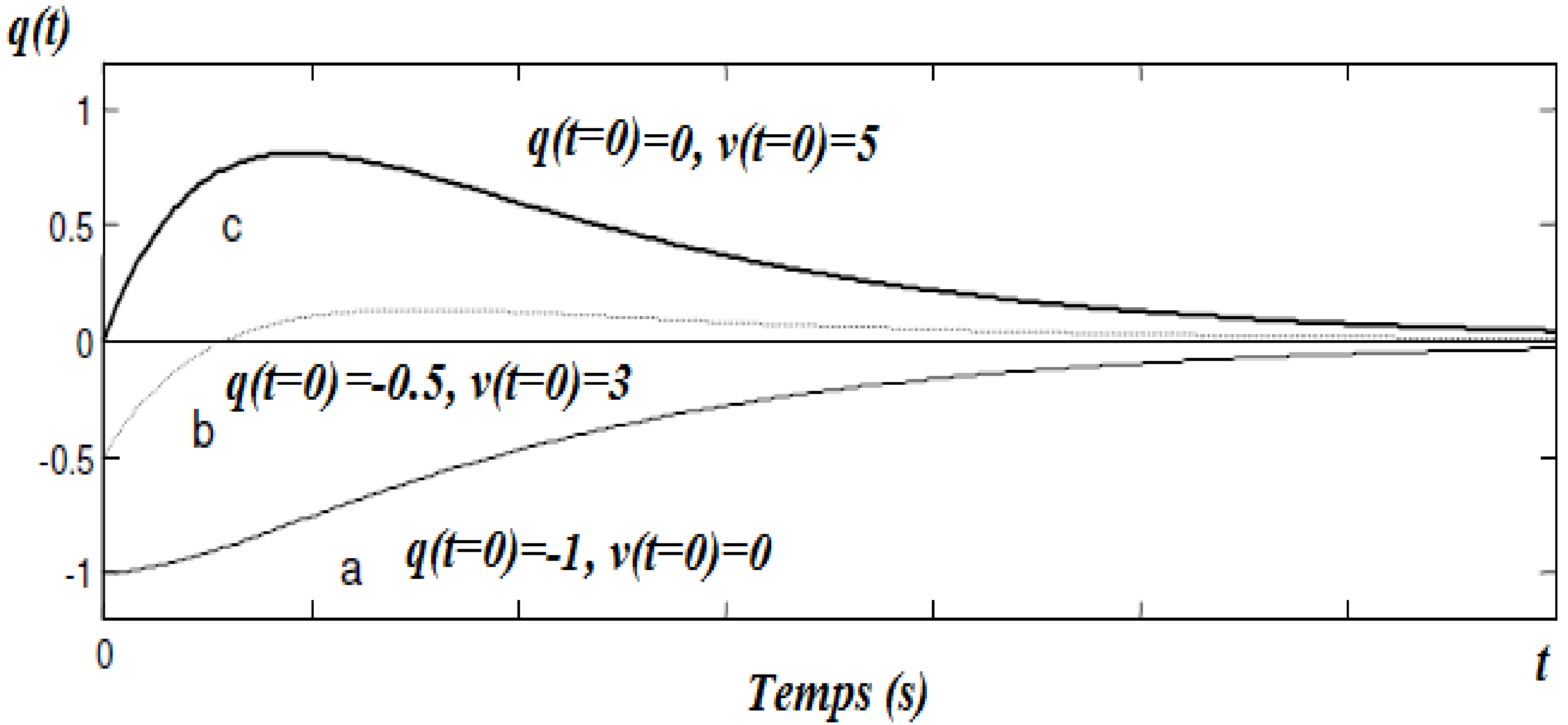


Figure 2.3: Mouvement amorti apériodique

❑Cas où *l'amortissement est critique:*

On a: $\Delta^{'} = 0 \Rightarrow \xi = \omega_0$

✓ La **solution de l'équation différentielle** est de la forme :

$$q(t) = (A_1 t + A_2)e^{r\,t}$$

$$r_1 = r_2 = r = -\xi$$

Où A_1 et A_2 sont coefficients à déterminer par les conditions initiales:

$$\begin{cases} q(t=0) = q_0 \\ \dot{q}(t=0) = \dot{q}_0 \end{cases}$$

✓ On dit que le système a un **mouvement amorti critique**.

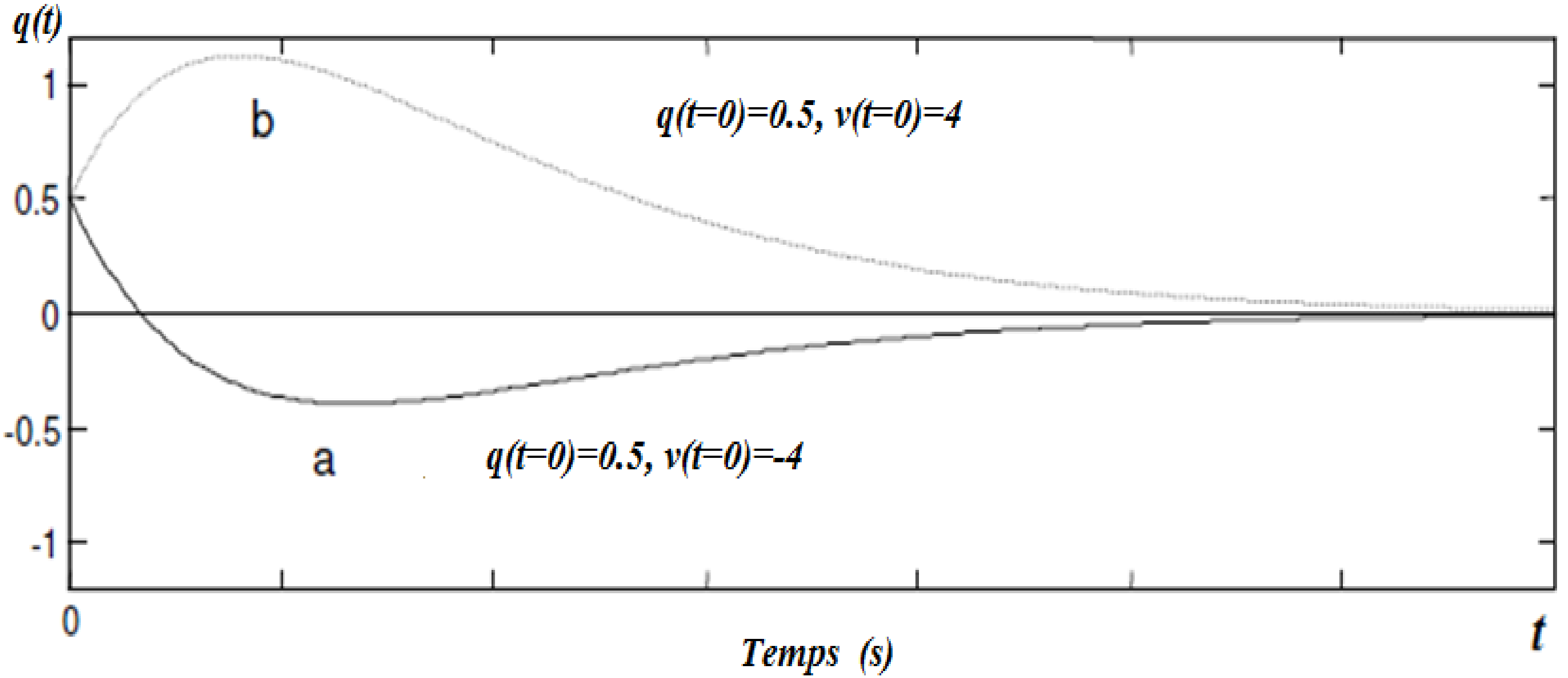


Figure 3.3: Mouvement amorti critique

Cas où *l'amortissement est faible:*

On a:

$$\Delta' \prec 0 \Rightarrow \xi \prec \omega_0$$

- La **solution de l'équation différentielle** est de la forme :

$$q(t) = Ae^{-\xi t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad avec \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}$$

Où A et φ sont des constantes à déterminer par les conditions initiales suivantes:

$$\begin{cases} q(t=0) = q_0 \\ \dot{q}(t=0) = \dot{q}_0 \end{cases}$$

- On dit que le système a un **mouvement oscillatoire amorti**.

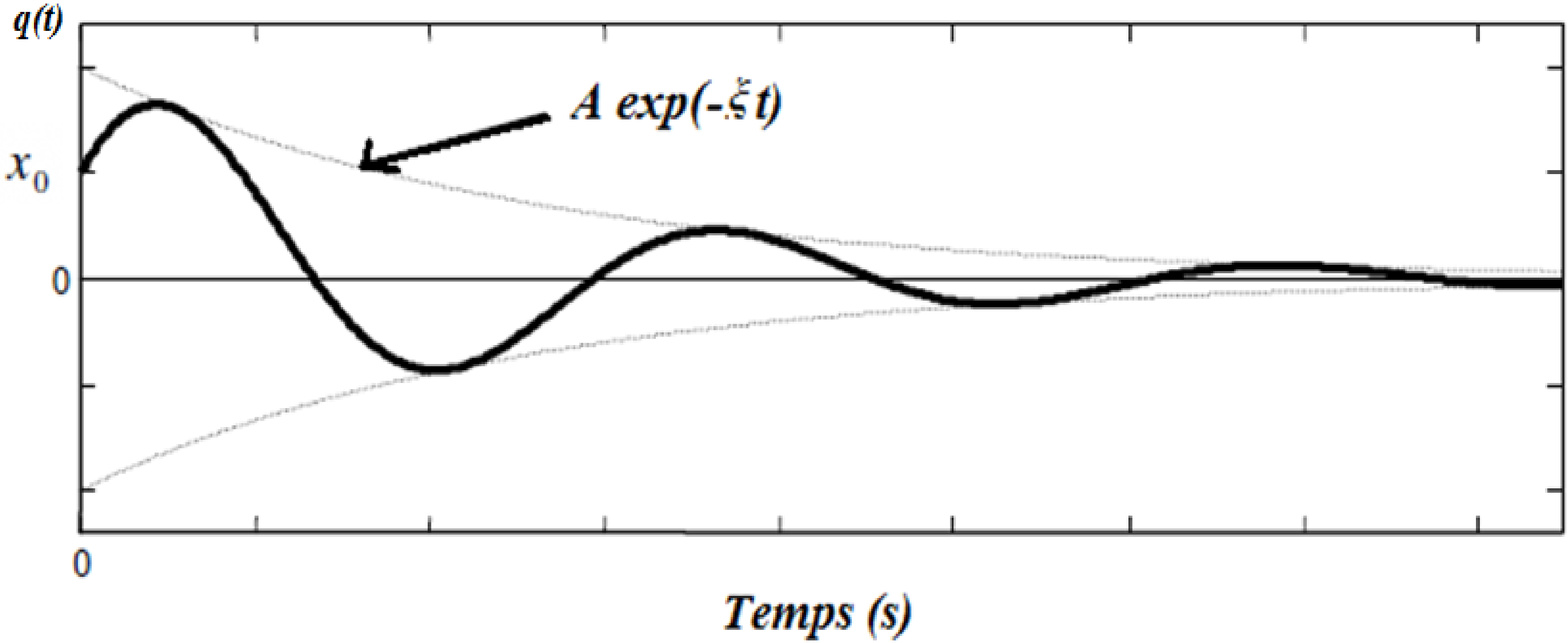


Figure 4.3: Mouvement oscillatoire amorti

❖ On définit la **pseudo-pulsation** du système comme suit:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}$$

❖ On définit **la pseudo-période** du système *T* comme suit :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

❖ On définit **le décrément logarithmique** δ qui représente la **<u>décroissance des élongations maximales à une seule pseudo-période</u>** ***T*** du système due à **l'amortissement faible** du système comme suit:

$$\delta = Ln\frac{q(t)}{q(t+T)} = \xi T$$

Aspect énergétique :

- Prenons un oscillateur mécanique comme exemple, on a l'équation du mouvement qui s'écrit comme suit :

$$m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x}$$

- On multiplie les des deux membres de l'équation ; on obtient

$$m\ddot{x}\,\dot{x} + kx\dot{x} = -\alpha\dot{x}^2$$

D'où:

$$m\dot{x}d\,\dot{x} + kxdx = -\alpha\dot{x}^2 dt$$

✓ Après **intégration** les deux membres; on obtient :

$$d\underbrace{\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2\right]}_{E_T}=-\alpha\dot{x}^2dt$$

D'où le **<u>signe moins caractérise la diminution de l'énergie totale</u>**,

✓ Finalement; on obtient :

$$\frac{dE_T(t)}{dt}=-\alpha\dot{x}(t)^2\prec 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta E_T+\Delta W_{f\vec{r}}=0$$

❖ **On conclue que le système subit <u>une perte d'énergie totale</u> due <u>au travail des forces de frottements</u>,**

✓ On donne **la puissance dissipée par les forces de frottement** P_d sous la forme de chaleur comme suit:

$$P_d = \alpha . v^2 = \alpha . \dot{x}^2(t)$$

✓ D'autre par on définit **la fonction dissipation, *D***, comme étant la demi-puissance dissipée ; et elle s'écrit comme suit:

$$D = \frac{1}{2} P_d = \frac{1}{2} \alpha . \dot{x}^2$$

✓ La force de frottement F_x peut alors s'écrire: $F_x = -\dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}}$

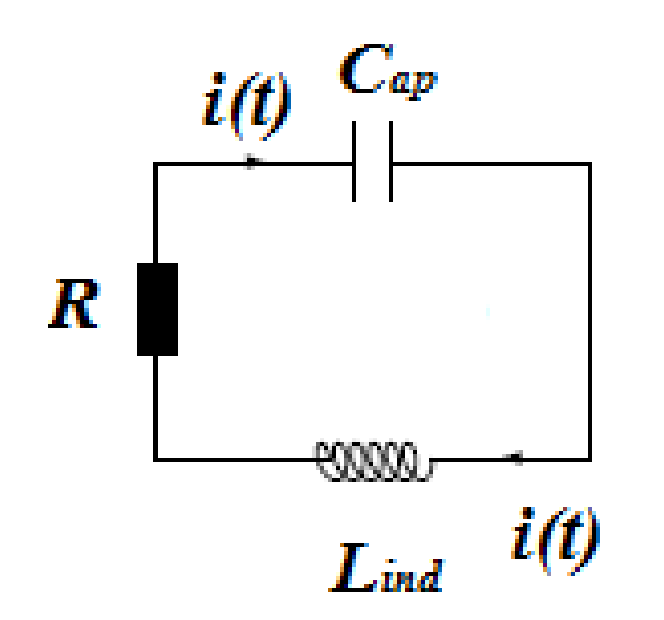
✓ Finalement ; **l'équation de Lagrange** pour une coordonnée généralisée ***q,*** s'écrit alors:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \qquad avec \quad L(q, \dot{q}) = E_c - E_p$$

Oscillateur électrique:

- Soit un circuit oscillant R.L.C représentée sur la figure 5.3 comme suit:

Figure 5.3 : Circuit oscillant *R.L.C*



- Le **bilan des tensions** s'écrit alors :

$$L_{ind}\frac{di(t)}{dt}+\frac{q(t)}{C_{ap}}+Ri(t)=0$$

- Sachant que le courant *i(t)* pendant un temps *dt* apporte une charge tel que :

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$$

- ✓ On obtient alors **l'équation différentielle** du mouvement comme suit :

$$L_{ind}\ddot{q}(t)+R\dot{q}(t)+\frac{q(t)}{C_{ap}}=0$$

- ✓ On remarque que cette équation est équivalente à l'équation d'un mouvement oscillatoire amorti représentée comme suit:

$$\ddot{q}(t)+\frac{R}{L_{ind}}\dot{q}(t)+\frac{q(t)}{L_{ind}C_{ap}}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x}(t)+\frac{\alpha}{m}\dot{x}(t)+\frac{k}{m}x(t)=0$$

- ✓ Pour des oscillations faibles, La solution générale de l'équation s'écrit alors:

$$q(t)=Ae^{-\xi t}\cos(\omega t+\varphi)$$

✓ En faisant **l'analogie entre le système mécanique et le système électrique** ; On obtient alors:

$$\begin{cases} L_{ind} & \Leftrightarrow & m \\ q(t) & \Leftrightarrow & x(t) \qquad et \quad R \Leftrightarrow \alpha \\ \dfrac{1}{c_{ap}} & \Leftrightarrow & k \end{cases}$$

❑ Ce qu'il faut retenir!

- **L'oscillation amortie dans le cas général** est régie par l'équation différentielle:

$$\ddot{q}(t) + 2\xi\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$$

- Il existe **3 types de solutions** :
  - ✓ Cas où ***le système est fortement amorti*** : $\xi \succ \omega_0$
  - ✓ Cas où ***l'amortissement est critique*** : $\xi = \omega_0$
  - ✓ Cas où ***l'amortissement est faible*** : $\xi \prec \omega_0$

- On définit **le décrément logarithmique** par **la décroissance de l'amplitude à une seule période** du système:

- Il faut signaler que **le système subit une perte d'énergie totale** due **au travail des forces de frottements**.