1ière Partie: VIBRATIONS

Chapitre 1: Généralités sur les oscillations

Dr Fouad BOUKLI HACENE

EPST TLEMCEN

ANNÉE 2015-2016

Objectifs:

1. Les coordonnées généralisées d'un système en mouvement
2. Le nombre de degrés de liberté
3. Le calcul des énergies cinétiques et potentielles
4. L'état d'équilibre
5. Les différentes méthodes de calculs des équations différentielles du mouvement

❑ Définitions:

- ✓ **La** <u>**vibration**</u> est un phénomène **oscillatoire** d'un corps en mouvement autour de sa position d'équilibre.

- ✓ On appelle <u>**mouvement périodique**</u> un mouvement qui se <u>**répète et dont chaque cycle se reproduit identiquement**</u>. la durée d'un cycle est appelée période, mesurée par la seconde et est défini comme suit :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- Où ω_0 est appelée **la pulsation** qui liée à la fréquence des oscillations et est mesurée en rad,s^{-1}.

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

- *On définit* **la fréquence** comme étant le **nombre d'oscillations** qui ont lieu par unité de temps *t, et est mesurée en Hertz,*

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Exemples:

- ✓ **Les battements du cœur,**
- ✓ **Le mouvement d'une balançoire,**
- ✓ **Le mouvement alternatif des pistons d'un moteur à explosion**

- Les vibrations dues
  <u>aux engins mécaniques</u>

- Les vibrations transmises
  <u>par les machines portatives</u>

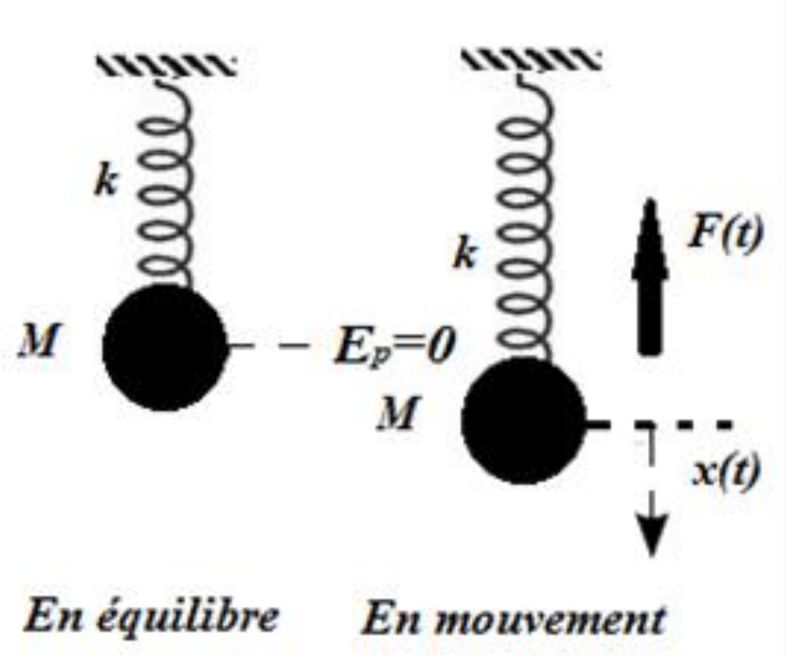
- Un **système physique oscillant** est repéré par **la coordonnée généralisée *q*** qui est définit par l’écart par rapport à la position d’équilibre stable.

- On définit ***n*** **le nombre de degrés de liberté** par **le nombre de mouvements indépendants d’un système physique**

Détermine le nombre d’équations différentielles du mouvement.

❑ Modélisation physique :

On associe à **tous les systèmes physiques** un système "**masse-ressort**" qui constitue **un excellent modèle** représentatif pour étudier les oscillations comme suit, figure 3.1 :



F(t) s'appelle la force de rappel est proportionnelle à l'allongement *x(t)*.
La constante *k* est appelée la constante de raideur.

Figure 3.1: Schéma masse-ressort

❖ La **representation de plusieurs ressorts** se présente en deux cas :

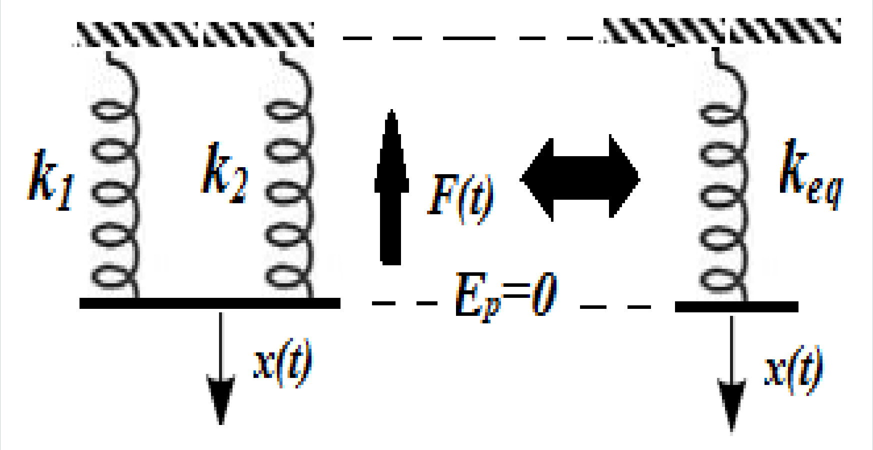


Figure 4.1 : Ressorts en parallèle

$$k_{//\,eq} = k_1 + k_2$$

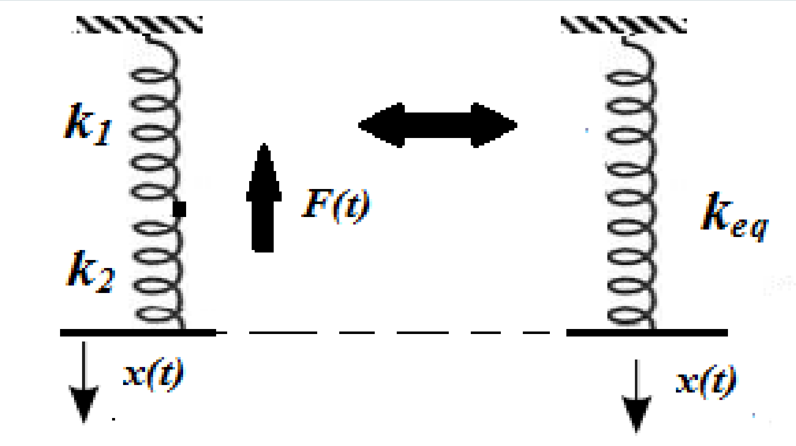


Figure 5.1 : Ressorts en série

$$\frac{1}{k_{s\,eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

L'énergie totale:

L'énergie totale du système est définie par la somme de deux types d'énergies :

- ***L'énergie cinétique*** d'un système mécanique s'écrit sous la forme :

$$E_c = \sum_{n \succ 1} \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2$$

- **L'énergie potentielle** d'un système mécanique s'écrit à partir de développement limité de Taylor sous la forme

$$E_p = E_p(0) + \frac{\partial E_p}{\partial q}\Big|_{q=0} q + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2}\Big|_{q=0} q^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 E_p}{\partial q^3}\Big|_{q=0} q^3 + \dots$$

- **Si l’allongement est infinitésimal; l’énergie potentielle** prend la forme **quadratique en fonction de l’écart par rapport à la position d’équilibre** représentée comme suit:

$$E_p \cong \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2}\Big|_{q=0} q^2$$

$\frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2}$ **:est appelée la constante de rappel.**

- La valeur ***q=0*** correspond à la position d’équilibre du système caractérisée par :

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_i}\Big|_{q=0} = 0$$

❑ Méthodes de calculs :

Le **calcul de l'équation du mouvement** pour un système conservatif peut être déterminé par **<u>trois méthodes</u>** :

❖ ***Principe de la conservation d'énergie totale*** :

$$E_T = E_c + E_p = Constante \quad \Rightarrow \quad \frac{dE_T}{dt} = 0$$

❖ **La loi dynamique de Newton:**

$$\sum_{n \succ 1} \vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$$

❖ ***Méthode de Lagrange-Euler:***

On définit la fonctionnelle $L(q, \dot{q})$ comme suit et **on applique le principe de moindre action**:

$$\partial \Gamma = 0$$

❖ Il existe **deux types d'équilibre**:

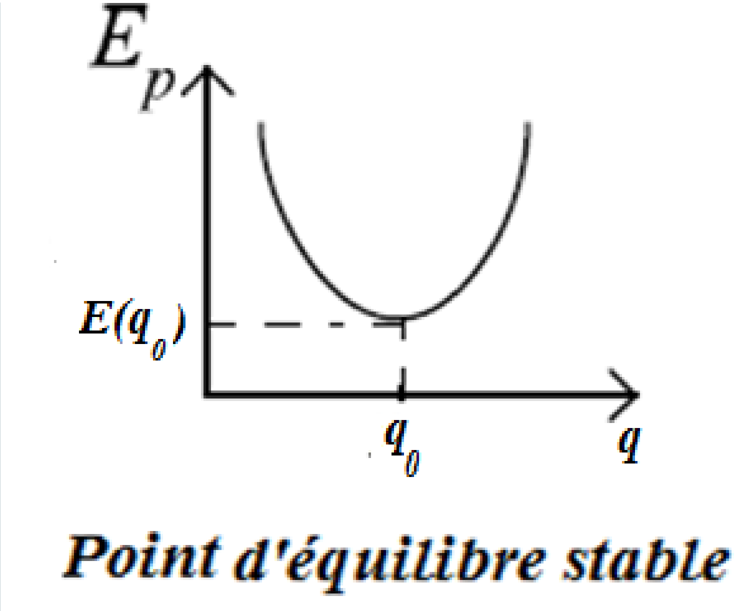


Figure 6.1: Equilibre stable

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2}\Big|_{q=0} \succ 0$$

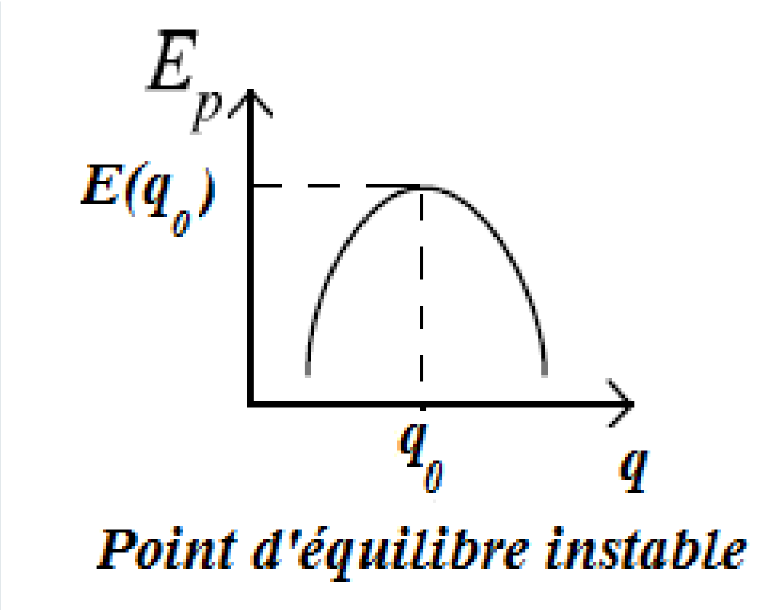


Figure 7.1: Equilibre instable

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2}\Big|_{q=0} \prec 0$$

- On prend deux exemples pour élucider **<u>les méthodes de calcul des équations du mouvement:</u>**

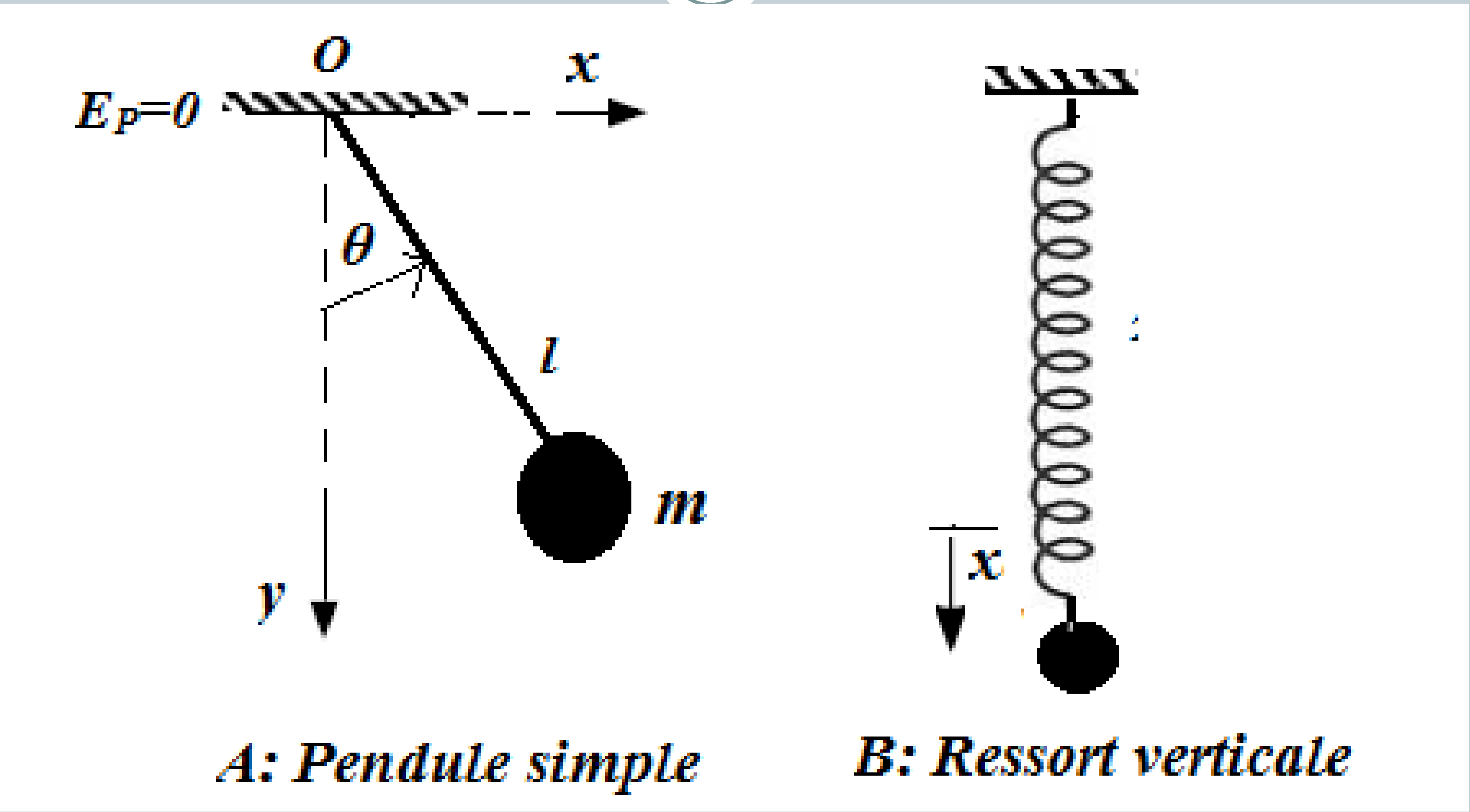


Figure 8.1 : Pendule simple-Ressort

❑ Méthode 1: Conservation de l'énergie totale:

- Pour le **pendule simple** : **Figue 8.1-A**:
  Le **vecteur de position** s'exprime comme suit

$$\vec{om}\begin{pmatrix} x = l\sin\theta \\ y = l\cos\theta \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

D'où

$$|v|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(l\dot{\theta}\right)^2$$

- **L'énergie cinétique** s'écrit : $\quad E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$

- Pour **l'énergie potentielle** on a: $\quad E_p = -mgl\cos\theta$

- Alors, **l'énergie totale** du système s'écrit: $\quad E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$

- En appliquant **le principe de conservation de l'énergie totale** pour un **système conservatif** ; on a:

$$\frac{dE_T}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-mgl\cos\theta\right]=0$$

- D'où ⇒ $$ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+mgl\dot{\theta}\sin\theta=0 \quad \Rightarrow \quad l\ddot{\theta}+g\sin\theta=0$$

- On obtient alors **l'équation différentielle** pour **des petites oscillations** comme suit :

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0 \qquad avec \quad \sin\theta\cong\theta$$

❑ Méthode 2: la loi de dynamique de Newton:

➢ Pour **le ressort** ; (**figure 8.1-b**): on applique **la loi dynamique de newton** :

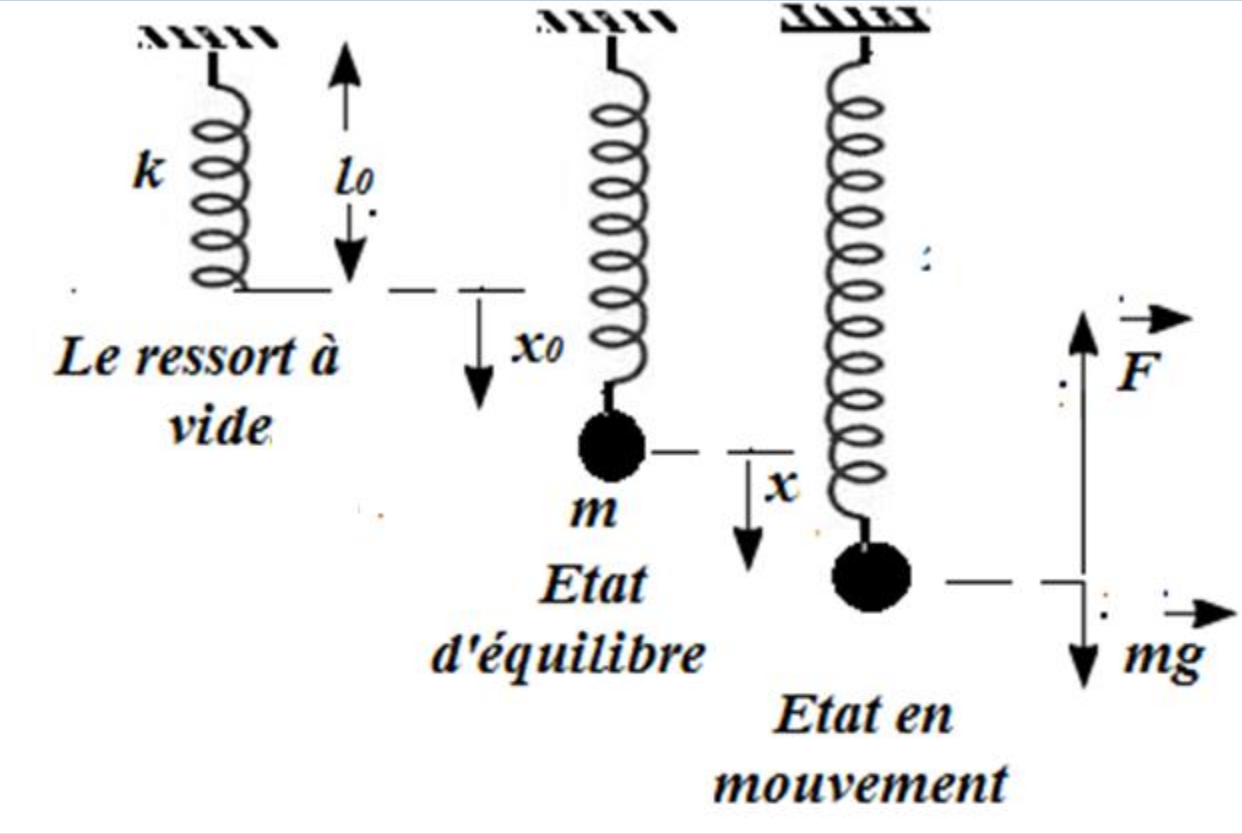


Figure 9,1 :
Etat du système
- ✓ **En Equilibre**
- ✓ **En Mouvement**

- En appliquant **<u>les différentes forces au système</u>** ; on obtient :

$$\vec{p} + \vec{F} = m\vec{a}$$

- En **projection sur l'axe** *Ox*; on obtient:

$$mg - k(x_0 + x) = m\ddot{x} \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{mg - kx_0}_{=0} - kx = m\ddot{x}$$

- Finalement **<u>l'équation différentielle du mouvement</u>** pour **des petites oscillations** s'écrit:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} = 0$$

Méthode 3: La loi de Lagrange:

- Dans le cas **d'un système dit conservatif**, on a **les forces dérivent d'un potentiel**,

- On définit **la fonctionnelle *L* appelé le Lagrangien du système** comme suit:

$$L(q,\dot{q}) = E_c - E_p$$

- On **définit l'action du système** comme la sommation, entre l'intervalle du temps, $[t_0, t_1]$ le long du trajet du système, de **la différence** entre **l'énergie cinétique** et **l'énergie potentielle**.

$$\Gamma = \int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot{q})dt$$

- La détermination du trajet se fait par une **méthode variationnelle**.
- Cette méthode aboutit aux **équations d'Euler-Lagrange** qui donnent des **chemins sur lesquels l'action est minimale**

- En appliquant le **principe de moindre action**, $\Rightarrow$ $\partial \Gamma = 0$

$\Downarrow$

- On obtient l'équation **d'Euler-Lagrange** pour un **système conservatif** comme suit:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, n$$

- L'équation du mouvement pour **un** **système dissipatif** (non conservatif) peut être déterminée comme suit :

❖ **Système en translation :**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\overline{\sum\left|\vec{F}_{ext}\right|} \qquad i=1,n$$

Où $\vec{F}_{ext}$ sont les **forces extérieures appliquées au système**

❖ **Système en rotation:**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\overline{\sum\left|\vec{M}_{ext}\right|} \qquad i=1,n$$

Où $\vec{M}_{ext}$ sont **les moments extérieurs appliqués** au système.
Dans ce cas **les forces ne dérivent pas d'un potentiel**

Ce qu'il faut retenir!

- **La** **vibration** est un phénomène **oscillatoire** d'un corps en mouvement **autour de sa position d'équilibre**

- **Le nombre de degrés de liberté le cas général *n* est définit** par **le nombre de mouvements indépendants d'un système physique,**

- Le nombre *n* détermine **le nombre d'équations différentielles** du mouvement

- Le **calcul de l'équation du mouvement** pour un système conservatif peut être déterminé par **trois méthodes:**
  1. **Le Principe de conservation de l'énergie totale**
  2. **La loi dynamique de Newton**
  3. **Le Principe de Lagrange**