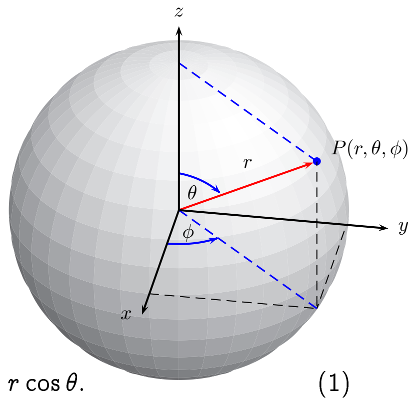
ÉCOLE PRÉPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES DE TLEMCEN

Département de Physique

PHYSIQUE II – Série TD N° 01

24 février 2013

I. Les Coordonnées Sphériques



Les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) d'un point P sont définies dans la figure ci-contre ; r est la distance de l'origine au point P (la norme du vecteur position), θ (l'angle formé avec l'axe des z) appelé *l'angle polaire* ou *colatitude*, et ϕ (l'angle formé avec l'axe des x dans le plan Oxy) est *l'azimut*. Leurs relations aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) se déduisent de la figure :

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\theta. \tag{1}$$

Notons que r varie de 0 à ∞, θ de 0 à π et ϕ de 0 à 2π.

Il existe, également, trois vecteurs unitaires $\hat{u}_r$, $\hat{u}_\theta$ et $\hat{u}_\phi$, pointant dans les directions croissantes des coordonnées correspondantes. Ils constituent une base *orthonormale* (vecteurs de normes 1 et mutuellement perpendiculaires, tout comme $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$), et tout vecteur $\overrightarrow{A}$ peut être exprimé sous la forme usuelle :

$$\overrightarrow{A} = A_r\hat{u}_r + A_\theta\hat{u}_\theta + A_\phi\hat{u}_\phi. \tag{2}$$

A_r, A_θ et A_ϕ sont les composantes radiale, azimutale et polaire de $\overrightarrow{A}$. En fonction des vecteurs unitaires cartésiens, on écrit :

$$\left.\begin{aligned} \hat{u}_r &= \sin\theta\cos\phi\,\hat{\imath} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k}, \\ \hat{u}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\,\hat{\imath} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\jmath} - \sin\theta\,\hat{k}, \\ \hat{u}_\phi &= -\sin\phi\,\hat{\imath} + \cos\phi\,\hat{\jmath}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Finalement, on écrit tout déplacement infinitésimal général :

$$\overrightarrow{dl} = dr\,\hat{u}_r + r d\theta\,\hat{u}_\theta + r\sin\theta d\phi\,\hat{u}_\phi. \tag{4}$$

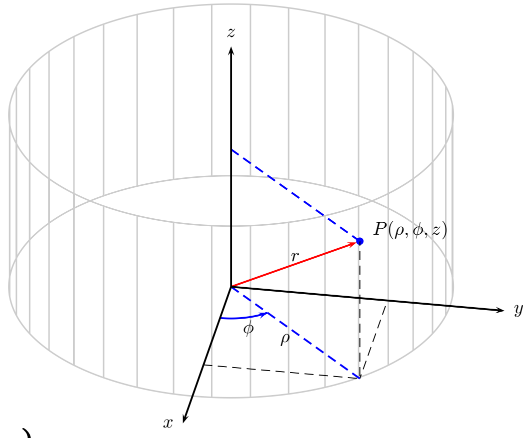
Ceci est l'équivalent de $\overrightarrow{dl} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}$ en coordonnées cartésiennes.

Un élément de volume infinitesimal $d\tau$, en coordonnées sphériques n'est autre que le produit des déplacements infinitesimaux :

$$d\tau = dl_r dl_\theta dl_\phi = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi. \tag{5}$$

Remarque :
Notons qu'il n'est pas possible de donner une expression générale pour les éléments de surface $\overrightarrow{ds}$, ceci dépend de l'orientation de la surface !

II. Les Coordonnées Cylindriques



Les coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) d'un point P sont définies dans la figure ci-contre. Notons que ϕ a la même signification qu'en coordonnées sphériques et z est identique en cartésienne ; par contre ρ est la distance séparant P de l'axe des z. La relation aux coordonnées cartésiennes est :

$$x = \rho \cos \phi, \qquad y = \rho \sin \phi, \qquad z = z. \tag{6}$$

Les vecteurs unitaires sont

$$\left.\begin{aligned} \hat{u}_\rho &= \cos \phi \, \hat{\imath} + \sin \phi, \\ \hat{u}_\phi &= -\sin \phi \, \hat{\imath} + \cos \phi \, \hat{\jmath}, \\ \hat{u}_z &= \hat{k}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Un déplacement élémentaire général s'écrit :

$$\overrightarrow{dl} = d\rho \, \hat{u}_\rho + \rho \, d\phi \, \hat{u}_\phi + dz \, \hat{k}, \tag{8}$$

et le volume élémentaire est

$$d\tau = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz. \tag{9}$$

Le domaine de variation de ρ est de 0 à ∞, ϕ varie de 0 à 2π et z de $-\infty$ à ∞.

III. Éléments d'Analyse Vectorielle

III.1 Gradient

Supposons que nous avons une fonction de trois variables, par exemple la température $T(x, y, z)$ dans un amphithéâtre. Une simple dérivée nous renseigne sur la vitesse de variation d'une fonction correspondant à un déplacement élémentaire dx. Dans le cas général, la situation est plus compliquée, cela dépend de la direction dans laquelle nous nous déplaçons : en nous élevant, la température va probablement augmenter, mais si nous nous changeons de position horizontalement, elle pourrait ne pas changer du tout. En fait, à la question "Quel est le taux de variation de T ?", existe une infinité de réponses, à chaque direction une réponse. Heureusement pour nous, un théorème sur les dérivées partielles stipule que

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) dz. \tag{10}$$

Ceci nous renseigne comment varira T si nous altérons toutes les trois variables de quantités infinitesimales dx, dy et dz. L'équation (10) nous rappelle un produit vectoriel :

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot (dx \, \hat{\imath} + dy \, \hat{\jmath} + dz \, \hat{k}) \tag{11}$$

$$= \left(\overrightarrow{\nabla} T\right) \cdot \left(\overrightarrow{dl}\right), \tag{12}$$

où

$$\overrightarrow{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k} \tag{13}$$

est le *gradient* de T. Le gradient a l'apparence d'un vecteur $\overrightarrow{\nabla}$ que multiplie un scalaire T :

$$\overrightarrow{\nabla} T = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) T. \tag{14}$$

Le terme entre parenthèse est appelée *del* (ou bien encore *nabla*) et est un *opérateur vectoriel* qui agit sur T, non pas un vecteur que multiplie T.

Le gradient est une quantité vectorielle pointant dans la direction de la croissance maximale de la fonction T. De plus, $|\vec{\nabla} T|$ nous donne le taux de variation le long de cette direction maximale. Imaginer que vous êtes à flanc de colline. Regarder autour de vous et trouver la montée la plus raide. Elle correspond à la direction du gradient. Maintenant mesuer la pente dans cette direction (la dénivelée) ; elle correspond à la norme du gradient.

Quelle est la signification d'un gradient qui s'annule ? Si $\vec{\nabla} T = 0$ au point (x, y, z), alors $dT = 0$ pour de petits déplacements autour de ce point. Cette situation correspond à un *point stationnaire* de la fonction $T(x, y, z)$. Ceci pourrait être un *maximum* (un sommet), un *minimum* (une vallée) ou un *point selle* (un col). Cette situation est analogue aux fonctions à une variable pour lesquelles une dérivée nulle signale un minimum, un maximum ou bien un point d'inflexion.

Un vecteur $\vec{A}$ peut être multiplié de différentes manières :

1. Multiplié par un scalaire a : $a\vec{A}$;
2. Multiplié par un autre vecteur $\vec{B}$, via le produit scalaire : $\vec{A} \cdot \vec{B}$;
3. Multiplié par un autre vecteur via le produit vectoriel : $\vec{A} \times \vec{B}$.

De la même manière, l'opérateur $\vec{\nabla}$ peut agir de trois façons :

1. Sur une fonction scalaire T : $\vec{\nabla} T$ (le *gradient*) ;
2. Sur une fonction vectorielle $\vec{v}$, via le produit scalaire : $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ (la *divergence*) ;
3. Sur une fonction vectorielle $\vec{v}$, via le produit vectoriel : $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ (le *rotationnel*).

III.2 Divergence

À partir de la définition de $\vec{\nabla}$, nous construisons la divergence :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right) \cdot (v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}) \tag{15}$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{16}$$

Il est clair que la divergence d'une fonction vectorielle est un *scalaire*. En quelque sorte, d'un point de vue spatial, elle mesure localement le flux sortant de ce champ vectoriel. À noter que $\vec{v}$ est une fonction, c'est-à-dire, elle associe à chaque point de l'espace un vecteur différent.

III.3 Rotationnel

À partir de la définition de $\vec{\nabla}$, nous construisons le rotationnel :

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \tag{17}$$

$$= \hat{\imath}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \hat{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \tag{18}$$

Le rotationnel est un *vecteur*, pour faire simple, disons qu'il mesure le taux d'enroulement d'un vecteur autour d'un point donné.

Exercice 01

1. Exprimer les coordonnées sphériques r, θ et ϕ en fonction de x, y et z.
2. Retrouver les relations (3). Vérifier vos réponses de différentes manières : $\hat{u}_r.\hat{u}_r \stackrel{?}{=} 1$, $\hat{u}_\theta.\hat{u}_\phi \stackrel{?}{=} 0$, $\hat{u}_r \times \hat{u}_\theta \stackrel{?}{=} \hat{u}_\phi$, ...
3. Calculer la surface d'une sphère de rayon R.
4. Calculer son volume de deux manières différentes.

Exercice 02

1. Retrouver les relations (7). Inverser vos formules pour déduire $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ et $\hat{k}$ en fonction de $\hat{u}_\rho$, $\hat{u}_\phi$, $\hat{k}$ (et ϕ, éventuellement).
2. Calculer toutes les dérivés des vecteurs unitaires $\hat{u}_\rho$, $\hat{u}_\phi$ et $\hat{k}$ par rapport à ρ, ϕ et z.

Exercice 03

Calculer le volume d'un cylindre centré à mis-hauteur sur l'origine $(0, 0, 0)$; son rayon à la base est R et sa hauteur H.

Exercice 04

Calculer le gradient de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Exercice 05

Soit $\overrightarrow{\ell}$ le vecteur de séparation entre un point fixe (x', y', z') et un point (x, y, z), et soit ℓ sa longueur. Monter que

1. $\overrightarrow{\nabla}(\ell^2) = 2\overrightarrow{\ell}$.
2. $\overrightarrow{\nabla}(1/\ell) = -\hat{\ell}/\ell^2$.
3. Donner la formule générale pour $\overrightarrow{\nabla}(\ell^n)$.

Exercice 06

Calculer les divergences *et* les rotationnels des fonctions vectorielles suivantes :

1. $\overrightarrow{v_a} = x^2\,\hat{\imath} + 3xz^2\,\hat{\jmath} - 2xz\,\hat{k}$.
2. $\overrightarrow{v_b} = xy\,\hat{\imath} + 2yz\,\hat{\jmath} + 3zx\,\hat{k}$.
3. $\overrightarrow{v_c} = y^2\,\hat{\imath} + (2xy + z^2)\,\hat{\jmath} + 2yz\,\hat{k}$.

Exercice 07

1. Si $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont deux fonctions vectorielles, donner l'expression $(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{B}$.
2. Calculer $(\hat{r} \cdot \overrightarrow{\nabla})\hat{r}$, où $\hat{r}$ est le vecteur unitaire de la direction portée par le vecteur $\overrightarrow{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$.
3. Pour les fonctions $\overrightarrow{v_a}$ et $\overrightarrow{v_b}$ de l'exercice précédent, calculer $(\overrightarrow{v_a} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{v_b}$.

Exercice 08

Trouver ou bien fabriquer des fonctions vectorielles dont la divergence et le rotationnel sont nuls partout.

Exercice 09

Vérifier les identités suivantes :

1. $\overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\nabla} T) = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \Delta T$ (le *laplacien*).
2. $\overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{\nabla} T) = 0$.
3. $\overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{v}) = 0$.