École Préparatoire en Sciences et Techniques de Tlemcen

Département de Physique

Physique II - TD N° 1

Exercice 01 :(A,B,C)

1. calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$$

Exercice 02 :(à faire par les élèves)

Vérifier l'égalité suivante dans le système de coordonnées cartésiennes :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

Exercice 03 :(fait en cours)

On donne les vecteurs unités dans le système de coordonnées cylindriques comme :

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j} \\ \vec{u}_z = \vec{k} \end{cases}$$

Exprimer les vecteurs en coordonnées cartésiennes $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ en fonction de $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$, et $\vec{u}_z$.

Exercice 04 :(à faire par les élèves)

1. Calculer la surface latérale d'un cylindre de hauteur L et de rayon R, en utilisant deux systèmes de coordonnées (cartésiennes et cylindriques).
2. Quel système de cordonnées est le plus approprié pour faire ce calcul ?

Exercice 05 :(fait en cours)

Exprimer le vecteur unité porté par un vecteur $\overrightarrow{AB}$ allant du point $A(0,0,h)$ sur l'axe des z au point $B(\rho,\theta,0)$ en coordonnées cylindriques.

Exercice 06 :(A,B,C)

Exprimer en coordonnées cylindriques le vecteur $\vec{A}$, donné en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{A} = y\vec{i} + x\vec{j} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{k}$$

Exercice 07 :(A,B,C)

1. Exprimer les coordonnées sphériques r, θ et φ en fonction des coordonnées cartésiennes x, y et z.
2. Retrouver l'expression du carré de l'élément différentiel dl^2 dans ce système de coordonnées.
3. Retrouver les expressions des vecteurs unitaires en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\vec{j} - \sin\theta\vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} \end{cases}$$

4. Faire les dérivées par rapport au temps des vecteurs unitaires.
5. Utiliser les coordonnées sphériques pour trouver la surface d'une aire découpée sur une sphère de rayon R et définie par $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ et $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$. Que devient ce résultat quand $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \pi$, $\varphi_1 = 0$ et $\varphi_2 = 2\pi$?
6. Établir l'expression donnant le volume d'une sphère de rayon R à partir du volume différentiel.

Exercice 08 :(A,B,C)

Soit le champ : $\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{x}\vec{i} + \frac{1}{y}\vec{j} + \frac{1}{z}\vec{k}$
Déterminer la fonction $V(x,y,z)$ tel que : $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$

Exercice 09 :(fait en cours)

Un point $M(x,y,z)$ étant repéré par le rayon vecteur $\vec{r} = O\vec{M}$, de module $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

1. calculer :$\vec{\nabla}r$, $\vec{\nabla}(\frac{1}{r})$ et $\vec{\nabla}\ln r$.
2. quel sens physique peut-on donner à un gradient ?
3. tracer les allures des champs résultant. Commenter.

Exercice 10 :(à faire par les élèves)

En explicitant la relation

$$dU = \vec{\nabla}\, U \cdot \vec{dl}$$

donner l'expression du gradient :

1. en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) ;
2. en coordonnées sphériques (r, θ, φ).

Exercice 11 :(fait en cours)

Donner la direction de la variation maximale de la fonction $f(x, y, z) = yz + xz + xy$ au point $(1, 1, 1)$. (donnez le vecteur unitaire).

Exercice 12 :(A,B,C)

Trouver l'équation du plan tangent à la surface $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ au point $(1, -1, 2)$

Exercice 13 :(A,B,C)

1. Donner l'expression du vecteur $\vec{\nabla} r^n$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
2. En déduire les expressions des gradients des vecteurs r^4 et $\dfrac{1}{r^2}$.
3. Pour quelle valeur de n le taux de variation de la fonction r^n serait constant ?

Exercice 14 :(à faire par les élèves)

Vérifier en coordonnées cartésiennes l'égalité suivante :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

Exercice 15 :(fait en cours)

1. Calculer la divergence
   a- du rayon vecteur $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,
   b- du vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$.
2. Déduire des calculs antérieurs la valeur du Laplacien de r, $\Delta(r)$ au point $(+1, +1, +1)$.

Exercice 16 :(A,B,C)

Soit la fonction : $\varphi(x, y, z) = x\, y^2 + y\, z^2 + z\, x^2$

1. Calculer $\vec{A} = \vec{\nabla}\varphi$; valeur de $\vec{A}$ au point $(1, 1, 0)$.
2. Calculer $\vec{B} = Ro\vec{t}A = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$
3. calculer $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ tels que $\vec{A} = x\,\vec{i}$, $\vec{A} = y\,\vec{i}$, $\vec{A} = \vec{u}_\theta$ et $\vec{A} = \frac{1}{r}\vec{u}_\theta$
4. Vérifier ce résultat dans le cas général.
5. Vérifier que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{C}) = 0$

Exercice 17 :(A,B,C)

On donne le champ de vecteurs $\vec{A}(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$.

1. Tracer sur le plan $z = 0$ le vecteur $\vec{A}$ aux points (1,1,0), (1,-1,0), (-1,1,0) et (-1,-1,0), en précisant pour chaque vecteur son vecteur unitaire et son module.
2. Calculer la divergence du champ $\vec{A}$. Que signifie ce résultat ?
3. Calculer le rotationnel du champ $\vec{A}$. Que signifie ce résultat ?

Exercice 18 :(fait en cours)

Le théorème de divergence (Green-Ostrogradsky) s'énonce comme suit :

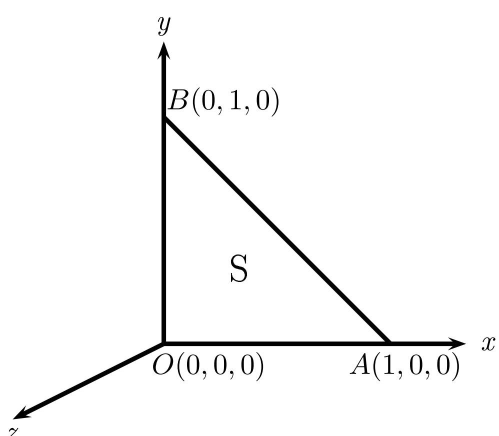
$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, dV;$$

1. Utiliser le vecteur $\vec{A}(r,\theta,\varphi) = r^2 \vec{u}_r$ pour vérifier ce théorème sur une sphère de rayon R.
2. Utiliser le vecteur $\vec{A}(x,y,z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ pour vérifier ce théorème sur un cube d'arête a.

Exercice 19 :(A,B,C)

On donne le potentiel $V(x,y,z) = yz + xz + xy$

1. Déterminer le champ $\vec{E}$ qui dérive du potentiel V.
2. Calculer le flux Φ qui sort de la surface S.
3. Calculer la circulation de $\vec{E}$ le long du contour triangulaire $OABO$ (voir figure ci-dessous).
4. Montrer que la circulation du vecteur $\vec{\nabla} r^n$ le long d'un contour fermé est nulle.



Exercice 20 :(à faire par les élèves)

Donner les expressions des opérateurs divergence et rotationnel dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques.