École Préparatoire en Sciences et Techniques de Tlemcen

Département de Physique

Physique II - TD N° 5

Exercice 01(A,B,C) :

1. Le potentiel électrostatique créé en un point M par une charge électrique q_1 en $(1, 0, 0)$ est donné par :
$$V_1(x,y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1}$$
avec $r_1 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ est la distance entre la charge q_1 et le point M. En remplaçant dans l'équation ci-dessus on obtient :
$$V_1(x,y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}$$
D'autre part, le potentiel électrostatique créé en un point M par une charge électrique q_2 en $(-1, 0, 0)$ est donné par :
$$V_2(x,y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2}$$
avec $r_2 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ est la distance entre la charge q_2 et le point M. En remplaçant dans l'équation ci-dessus on obtient :
$$V_2(x,y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}$$
Selon le principe de superposition, le potentiel électrostatique créé par les deux charges électriques q_1 et q_2 en M est la somme algébrique des deux potentiels électrostatiques V_1 et V_2, à savoir :
$$V(x,y) = V_1(x,y) + V_2(x,y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} + \frac{q_1}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}\right]$$

2. Le champ électrostatique créé en M par les deux charges électriques q_1 et q_2 est obtenu, en se rappelant que
$$\vec{E}(x,y) = -\vec{\nabla}V(x,y) = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{i}\right]$$

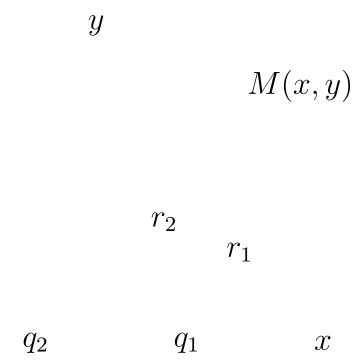

FIGURE 1 – Deux charges électriques q_1 en $(1, 0, 0)$ distant de r_1 par rapport au point $M(x, y)$ et q_2 en $(-1, 0, 0)$ distant de r_2 par rapport au point $M(x, y)$

Puisqu'on s'intéresse au champ électrostatique dans le plan Oxy, on a $\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0$. Alors que

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x-1}{\left[(x-1)^2+y^2\right]^{3/2}} - \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x+1}{\left[(x+1)^2+y^2\right]^{3/2}}$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{\left[(x-1)^2+y^2\right]^{3/2}} - \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{\left[(x+1)^2+y^2\right]^{3/2}}$$

3. l'énergie potentielle électrostatique d'une charge q_3 placée en $(0, 1, 0)$ est donnée par

$$E_P^{q_3} = q_3\, V(0, 1, 0)$$

où $V(0, 1, 0)$ est le potentiel électrostatique créé en $(0, 1, 0)$ par les deux charges q_1 et q_2, égal à

$$V(0, 1, 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right]$$

avec $r_1 = \sqrt{2}$ et $r_2 = \sqrt{2}$, ce qui donne enfin :

$$V(0, 1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(q_1 + q_2)$$

et l'énergie électrostatique s'écrit :

$$E_P^{q_3} = \frac{q_3}{\sqrt{2}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(q_1 + q_2)$$

EXERCICE 02 :(FAIT EN COURS)

1. L'énergie électrostatique du système des 5 charges électriques $q_i, i = 1, \cdots 5$ est égale à

$$E_P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} q_i\, V_i$$

$-e$ $-e$

r

e $\sqrt{2}r$

$-e$ $-e$

FIGURE 2 – Quatre électrons placés aux sommets d'un carré d'arête a et un proton au centre

où V_i sont les potentiels électrostatiques créés en $\vec{r}_i$ par toutes les charges du système à l'exception de la charge q_i. En effet

$$E_P = \frac{1}{2}\left[-eV_1 - eV_2 - eV_3 - eV_4 + eV_5\right]$$

où V_1, V_2, V_3 et V_4 sont les potentiels électrostatiques créés par les électrons sur le cercle à l'endroit ou se trouve le proton. Par symétrie, ces potentiels sont égaux. En effet

$$V_1 = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r} - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}r} - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}r}$$

ou encore

$$V_1 = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}(0.5 - \sqrt{2})$$

alors que le potentiel électrostatique créé par les quatre électrons à la position du proton est égal à

$$V_5 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{r}$$

Finalement :

$$E_P = \frac{1}{2}\left[-4\,eV_1 + e\,V_5\right] = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left[-4(0.5 - \sqrt{2}) - 4\right]$$

2. si on abandonne le système à partir du repos, il évoluera de telle sorte que son énergie cinétique augmente. Puisque l'énergie totale du système est conservée (elle ne dépend pas de la position des charges électriques en r) :

$$\frac{E_c + E_p}{dr} = 0$$

ou encore

$$\frac{E_c}{dr} = -\frac{E_p}{dr}$$

mais on sait auparavant que

$$\frac{dE_p}{dr} > 0$$

car on vint de trouver que

$$E_p = -\frac{A}{r}$$

avec $A = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-4(0.5-\sqrt{2})-4\right] > 0$ ce qui signifie que l'augmentation de l'énergie cinétique s'accompagne avec une diminution du rayon r. Ainsi, les électrons une fois lâchés convergeront vers le noyau.

$$\frac{dE_c}{dr} < 0$$

Exercice 03 :(A faire par les élèves)

On choisit deux éléments de charges sur le fil conducteur dq_1 et dq_2 symétriques par rapport à une origine O (l'origine peut être choisie n'importe ou sur le fil car supposé infini !). Le potentiel électrostatique créé par ces deux éléments de charge au point M distant de R du fil est donné par :

$$dV = dV_1 + dV_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{dq_1}{r_1} + \frac{dq_2}{r_2}\right]$$

avec

$$r_1 = r_2 = \sqrt{R^2 + z^2}$$

Le potentiel électrostatique créé en M par la totalité des charge sur le fil(infini) est donné par :

$$V(M) = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{+\infty} \frac{dq}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

avec

$$dq = \lambda dz$$

d'où

$$V(M) = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[arcsin(\frac{z}{R})\right]_0^{\infty}$$

On est confronté à ce niveau au problème de la valeur infinie de l'intégrale. Ceci est due au fait que le potentiel électrostatique à l'infini n'est pas nul, alors que par définition du potentiel, ceci est considéré nul à l'infini (pas de charges électriques à l'infini alors que dans notre cas des charges électriques existent à l'infini). On peut contourner ce problème en calculant tout d'abord le champ électrostatique créé par les charges électriques sur ce fil au point M, ensuite on en déduit le potentiel électrostatique. En effet, en utilisant le théorème de Gauss sur une surface de gauss sous forme de cylindre de hauteur h et de rayon r dont l'axe (selon la hauteur) est suivant le fil chargé. Ce choix de la surface de gauss est dicté par le fait que le champ électrostatique créé par le fil infini est perpendiculaire au fil et que son module est le même sur la surface latérale d'un cylindre entourant le fil. On a donc

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_L} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Puisque le champ électrostatique est radial,

$$\vec{E}\cdot d\vec{S_1} = \vec{E}\cdot d\vec{S_2} = 0$$

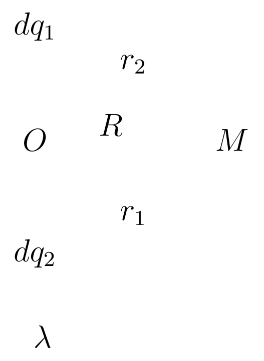

FIGURE 3 – Un fil conducteur supposé infini portant une charge électrique de distribution linéique λ

alors que

$$\vec{E} \cdot d\vec{S_L} = E\, dS_L$$

avec $dS_L = r dz\, d\theta$, ce qui donne

$$\int_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} E(r) r\, d\theta = 2\pi r\, L\, E(r)$$

et

$$Q_{int} = \lambda h$$

d'où

$$2\pi r\, h\, E(r) = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

ou encore, le module du champ électrostatique

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

En coordonnées cylindriques, ceci s'écrit sous la forme

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r$$

D'autre part, on sait que

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z\right)$$

Par identification, on trouve

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0,$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

On a donc

$$dV = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$$

ce qui donne

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} lnr + cste$$

Exercice 04 :(A,B,C)

1. Le champ électrostatique s'obtient en utilisant le théorème de Gauss, avec la surface de Gauss sous forme d'une surface sphérique de rayon r concentrique à la boule chargée. Puisque la charge électrique est uniformément répartie dans la boule, le champ électrostatique en tout point de l'espace est radial (suivant l'axe portant $\vec{u}_r$) avec un module qui est constant en tout point de la surface sphérique concentrique à la boule chargée. Cette symétrie nous permet d'écrire :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

r

r

R

Figure 4 – Sphère de rayon R chargée uniformément avec une charge volumique ρ, et deux surfaces de Gauss sphériques de rayon r : $r < R$ et $r > R$.

(a) Pour $r > R$, la charge électrique contenue dans le volume délimité par la surface de Gauss (surface sphérique de rayon r) est égale à Q, ce qui donne

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Le vecteur du champ électrostatique s'écrit donc sous la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

Mais on sait que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{dV}{dr} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

ou encore

$$dV = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,dr$$

Ce qui donne

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + C_2$$

Remarquons qu'à l'infini, le potentiel électrostatique est nul, ce qui donne $C_2 = 0$, et l'expression du potentiel électrostatique dans cette région est donnée par :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

(b) Pour $r < R$, la charge électrique contenue dans le volume délimité par la surface de Gauss (surface sphérique de rayon r) est égale à

$$Q_{int} = \rho\frac{4\pi}{3}r^3 = Q\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

où Q est la charge totale de la boule. Ce qui donne

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\,r}{R^3}$$

Le vecteur du champ électrostatique s'écrit donc sous la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\,r}{R^3}\vec{u}_r$$

D'autre part, on a

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{dV}{dr} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\,r}{R^3}$$

ou encore

$$dV = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r\,dr$$

Ce qui donne

$$V(r) = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r^2 + C_1$$

D'autre part, la condition de continuité en $r = R$ (les deux expressions de $V(r)$ donnent la même valeur) :

$$V(R) = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}R^2 + C_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

Ce qui donne

$$C_1 = \frac{3}{8}\frac{Q}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

Cela nous permet d'écrire

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right)$$

2. L'énergie électrostatique du système est donnée par

$$E_P = \frac{1}{2}\iiint \rho(\vec{r})V(r)d\tau$$

Remarquons que la chargé électrique est totalement contenue dans la boule, c'est à dire que

$$\rho(r) = 0 \qquad \text{pour} \qquad r > R$$

et

$$\rho(r) = \rho \qquad \text{pour} \qquad r \leq R$$

Ce qui donne

$$E_P = \frac{\rho}{2}\int_0^R V(r)d\tau = \frac{\rho}{2}\int_0^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right)4\pi r^2 dr$$

ou encore

$$E_P = \frac{3Q\rho}{4R\varepsilon_0}\int_0^R r^2 dr - \frac{Q\rho}{4R^3\varepsilon_0}\int_0^R r^4 dr$$

L'énergie électrostatique du système s'obtient donc

$$E_P = \frac{Q\rho R^2}{4\varepsilon_0} - \frac{R^2 Q\rho}{20\varepsilon_0} = \frac{Q\rho R^2}{5\varepsilon_0}$$

Mais on sait aussi que

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

Ce qui, en remplaçant dans l'expression ci-dessus, donne

$$E_P = \frac{Q\rho R^2}{4\varepsilon_0} - \frac{R^2 Q\rho}{20\varepsilon_0} = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

3. L'énergie potentielle électrostatique emmagasinée dans le noyau d'uranium est donnée par

$$E_P = \frac{3(92 \times 1.6 \times 10^{-19})^2}{20\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 9 \times 10^{-15}} Joules$$

Exercice 05 :(A,B,C)

1. La charge Q est répartie uniformément sur la surface d'une sphère de rayon R :

$$Q = \sigma 4\pi R^2$$

σ étant la densité surfacique. Cela entraine la fait que le potentiel électrostatique créé à l'extérieur de la surface a une symétrie sphérique ; c'est à dire qu'il a la même valeur en tout point sur une surface sphérique de rayon r centrée en 0. En effet, chaque élément de charge électrique dq avec

$$dq = \sigma dS_R = \sigma R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

contribue au potentiel électrostatique créé au point M avec une quantité égale à

$$dV(M) = \frac{\sigma R^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_{NM}}$$

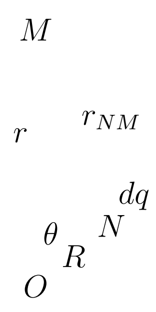

FIGURE 5 – Une charge électrique positive déposée sur la surface d'une sphère de rayon R.

où r_{NM} est la distance entre le point M et la position de l'élément de la charge dq. D'autre part, on a :

$$\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM}$$

ou encore

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$$

ce qui donne :

$$NM^2 = r_{NM}^2 = (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON})^2 = OM^2 + ON^2 - 2 \cdot \overrightarrow{0M} \cdot \overrightarrow{ON}$$

$$r_{NM}^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta > 0$$

Remarquons que la variation de r_{NM} en fonction de θ est :

$$2r_{NM}dr_{NM} = 2rR\cos\theta$$

Ce Qui nous permet d'écrire

$$dV = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}dr_{NM}d\varphi$$

ou en remplaçant l'expression de r_{MN} ci dessus on trouve :

$$dV(M) = \frac{\sigma R^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cdot \cos\theta}}$$

Posons

$$u = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta$$

ce qui donne

$$du = 2rR\sin\theta d\theta$$

ou encore

$$dV = \frac{\sigma R}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{\sqrt{u}}d\varphi$$

$$V = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{r^2+R^2-2rR}^{r^2+R^2+2rR} u^{-\frac{1}{2}} du$$

L'intégration donne

$$V = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \left[\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR} - \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR}\right]$$

ou encore

$$V = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \left[\sqrt{(r + R)^2} - \sqrt{(r - R)^2}\right]$$

Remarquons ici que la racine carrée d'une expression est toujours positive, ce qui permet de réécrire l'expression ci-dessus

$$V(r) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \left[(r + R) - (\pm(r - R))\right]$$

On doit prendre le signe $+$ si r était supérieur à R et le signe $-$ si r était inférieur à R, à savoir :

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{\sigma R}{\epsilon_0} = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{1}{R} & r < R \\ \dfrac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \dfrac{1}{r} = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{1}{r} & r > R \end{cases}$$

Il est possible de retrouver le résultat précédent on procédant d'une autre manière. En effet, le potentiel électrostatique s'obtient en intégrant φ de 0 à 2π et r_{NM} de $|r - R|$ à $|r + R|$, à savoir :

$$V(r) = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_{r-R}^{r+R} dr_{NM} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\sigma R}{2\, r\epsilon_0} \left[r_{NM}\right]_{|r-R|}^{r+R}$$

(a) Pour $r < R$, on aura

$$V(r) = \frac{\sigma R}{2\, r\epsilon_0} \left[r_{NM}\right]_{R-r}^{r+R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

(b) Pour $r > R$, on aura

$$V(r) = \frac{\sigma R}{2\, r\epsilon_0} \left[r_{NM}\right]_{r-R}^{r+R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

A l'extérieur de la sphère chargée, le potentiel électrostatique est le même que celui d'une charge électrique positionnée au centre de la sphère, alors qu'à l'intérieur de la sphère le potentiel électrostatique est constant et est égal à au potentiel électrostatique à la surface de la boule. En remplaçant les valeurs des charges électriques et de rayons pour chaque boule, on obtiendra les expressions du potentiel électrostatique pour chaque boule en tout point de l'espace.

2. L'énergie électrostatique du système est donnée par

$$E_P = \frac{1}{2} \iint \sigma(\vec{r}) V(r) dS$$

Remarquons que la charge électrique est répartie uniformément sur la surface de la sphère où le potentiel électrostatique est constant et est égal à

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

ce qui permet d'écrire

$$E_P = \frac{1}{2}\int \sigma V(R)dS = \frac{1}{2}\frac{\sigma Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}4\pi R^2 = \frac{\sigma QR}{2\epsilon_0}$$

Mais on sait que

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

L'expression de l'énergie électrostatique devient

$$E_P = \frac{Q^2}{8\pi R\epsilon_0}$$

C'est l'énergie potentielle électrostatique d'une charge électrique Q répartie uniformément sur la surface d'une sphère conductrice de rayon R. A comparer avec l'énergie potentielle électrostatique d'une charge électrique Q répartie uniformément dans le volume d'une sphère conductrice de rayon R donnée par (voir exercice précédent) :

$$E_P = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

On voit bien que

$$\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R} > \frac{Q^2}{8\pi R\epsilon_0}$$

Ce résultat montre clairement qu'une charge électrique une fois déposée sur une sphère conductrice tend à adopter une répartition sur la surface plutôt que se répartir dans tout le volume, car la répartition surfacique correspond à une énergie minimale !

3. le champ électrostatique créé par cette répartition surfacique des charges est donnée par :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

Puisque V ne dépend que de r on a

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\vec{u_r}$$

ou encore

$$\vec{E} = E_r\vec{u_r}$$

avec

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \begin{cases} \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

4. Le potentiel électrostatique correspondant à la sphère de rayon R_1 portant une charge électrique Q_1 est donné par

$$V_1(r) = \begin{cases} \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{R_1} & r < R \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r} & r \geqslant R \end{cases}$$

alors que le potentiel électrostatique correspondant à la sphère de rayon R_2 portant une charge électrique Q_2 est donné par

$$V_2(r) = \begin{cases} \dfrac{Q_2}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{R_2} & r < R \\ \dfrac{Q_2}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r} & r \geqslant R \end{cases}$$

Le champ électrostatique créé par la sphère de rayon R_1 est donné par

$$E_r^1 = -\frac{\partial V_1}{\partial r} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & r \geq R_1 \\ 0 & r < R_1 \end{cases}$$

et celui créé par la sphère de rayon R_2

$$E_r^2 = -\frac{\partial V_2}{\partial r} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & r \geq R_2 \\ 0 & r < R_2 \end{cases}$$

5. Une fois les deux sphères conductrices de rayons R_1 et R_2 portant des charges électriques Q_1 et Q_2, respectivement, sont mises en contact, un nouveau équilibre électrique prend naissance moyennant un réarrangement des charges électriques sur le système composé maintenant de deux sphères et un fil conducteur. Ce réarrangement se fait par un transfert de charges électriques entre les deux sphères (le fil conducteur est considéré ici seulement comme un moyen de transfert de charges : il n'accumule pas des charges sur sa surface !) jusqu'à ce que le potentiel électrostatique sur les deux sphères soit le même. On peut faire l'analogie avec deux corps portés à deux températures différentes qui une fois mis en contact retrouvent la même température. Les charges électriques seront q_1 sur la première et q_2 sur la deuxième, avec (conservation de la charge électrique d'un système isolé)

$$Q_1 + Q_2 = q_1 + q_2$$

Le potentiel électrostatique sur chaque sphère est donné par

$$V_0 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2}$$

Les charges électriques sur chaque sphère est donnée par

$$q_1 = \frac{R_1(Q_1 + Q_2)}{R_1 + R_2} \qquad \text{et} \qquad q_2 = \frac{R_2(Q_1 + Q_2)}{R_1 + R_2}$$

avec

$$V_0 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1 + R_2}$$

6. Rappelons que le champ électrostatique créé sur la sphère de rayon R_1 et portant une charge q_1 égal à

$$E_r^1(r) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

ce qui, en remplaçant r par R_1 dans l'expression ci-dessus, donne

$$E_r^1(r) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1^2} = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1(R_1+R_2)} = \frac{V_0}{R_1}$$

alors que le champ électrostatique créé sur la surface de la sphère de rayon R_2 et portant une charge q_2 est donné par :

$$E_r^2(r) = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2^2} = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2(R_1+R_2)} = \frac{V_0}{R_2}$$

Exercice 06 :(Fait en cours)

a $\quad$ $M(i=0)$

$+q \quad -q \quad +q \quad -q \quad +q \quad -q \quad +q \quad -q \quad +q$

Figure 6 – Une chaine supposée infinie de charges électriques de polarité alternée.

L'énergie potentielle électrostatique d'un ion à la position M $(i=0)$ sur la chaine est donnée par

$$E_P(M) = \sum_{i=-\infty, i\neq 0}^{\infty} q_M V_i(M)$$

où q_M est la charge de l'ion en M et $V_i(M)$ le potentiel électrostatique créé en M par la charge électrique en i. La symétrie du système de charges électriques par rapport au point $i=0$ permet d'écrire

$$E_P(M) = 2\sum_{i=1}^{\infty} q_M V_i(M)$$

Remarquons que

$$V_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_i}$$

où q_i est la charge électrique en i et r_i la distance entre la charge électrique en i sur la chaine et la charge électrique en $i=0$. Par exemple

$$V_1(0) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} < 0$$

et

$$V_2(0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2a} > 0$$

Ce qui donne

$$E_P(M) = 2\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{3a} + \frac{1}{4a} - \cdots\right)$$

ou encore

$$E_P(M) = -2\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right)$$

Remarquons que

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

ce qui pour $x = 1$ donne

$$ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Ce résultat permet d'écrire l'expression de l'énergie potentielle électrostatique de l'ion en $i = 0$ comme

$$E_P(M) = -\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}ln(2) = -3.2 \times 10^{-16} Joules$$

Exercice 07 :(A,B,C)

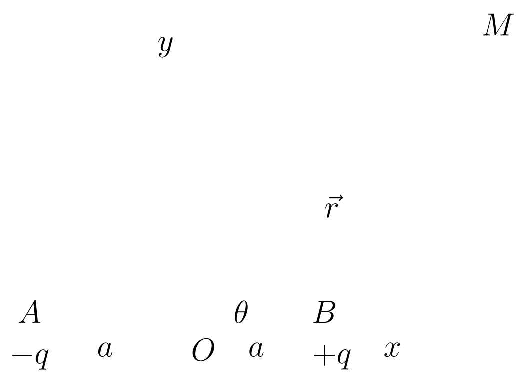

Figure 7 – Un dipôle électrostatique dont les charges positive est en B et la charge négative en A avec une distance $2a$ entre les deux charges électriques.

1. Le potentiel électrostatique créé par ces deux charges au point M est donné par :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{AM} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(+q)}{BM}$$

ou encore

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{BM} - \frac{1}{AM}\right)$$

Mais on sait que (relation de Chasles) :

$$BM^2 = \left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}\right)^2 = \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}\right)^2$$

ou encore

$$BM^2 = \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}\right)$$

$$BM^2 = OM^2 + OB^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OB} = OM^2 + OB^2 - 2OM \cdot OB\,\cos\theta$$

Ce qui donne

$$BM = \sqrt{r^2 + a^2 - 2r \cdot a\,\cos\theta}$$

En sortant r de la racine carrée, on obtient

$$BM = r\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\frac{a}{r}\cos\theta}$$

De la même manière, on obtient pour AM :

$$AM = r\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2\frac{a}{r}\cos\theta}$$

Il serait utile de réécrire les expressions ci-dessus sous la forme :

$$\frac{1}{BM} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\frac{a}{r}\cos\theta}}$$

et

$$\frac{1}{AM} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2\frac{a}{r}\cos\theta}}$$

Puisque $r >> 2\,a$ ou encore $(\frac{a}{r} << 1)$, il serait judicieux de se contenter, avec une bonne approximation, du premier ordre en $\frac{a}{r}$. En effet, en faisant un développement limité de la fonction

$$\frac{1}{BM} = \frac{1}{r}\left(1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$$

en gardant seulement le premier ordre en $\frac{a}{r}$, on obtient :

$$\frac{1}{BM} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta\right)$$

De la même manière, on trouve :

$$\frac{1}{AM} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta\right)$$

En remplaçant les expressions de AM et BM dans l'expression du potentiel électrostatique, on obtient :

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\,a\,\cos\theta}{r^2}$$

Rappelons que

$$\vec{p} = q\,\overrightarrow{BA} = q|\overrightarrow{AB}|\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{BA}|} = 2\,q\,a\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

Le produit scalaire entre $\vec{p}$ et $\vec{r}$ donne :

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = \frac{2\,q\,a}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB} \cdot \vec{r} = \frac{2\,q\,a}{|\overrightarrow{AB}|}|\overrightarrow{AB}| \cdot r\cos\theta = 2\,q\,a\,r\cos\theta$$

Ou encore

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\vec{p}\cdot\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\,a\cos\theta}{r^2} = V(\vec{r})!!$$

Donc, à la condition que le point M auquel un dipôle électrostatique crée un potentiel électrostatique est très lointain, ce dernier peut se mettre sous la forme :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

où $\vec{p}$ est le vecteur moment dipolaire du dipôle électrostatique et $r = |\vec{r}|$ la distance entre le centre du dipôle et le point où l'on veut mesurer le potentiel.

2. Comme $V(\vec{r})$ ne dépend que de r et θ (coordonnées polaires),

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

seules les composantes E_r et E_θ du champ électrostatique $\vec{E}$ seront non nulles. En effet

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\vec{u}_\theta\right)$$

où on a utilisé le gradient en coordonnées polaires (car c'est le système de coordonnées le plus approprié pour le cas présent !) Un simple calcul nous donne

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\vec{u}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\vec{u}_\theta\right)$$

3. le champ électrostatique en $r = 1\,m$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ est égal à

$$E_r = 4.5V/m \qquad \text{et} \qquad E_\theta = 3.9V/m$$

avec

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = 5.95V/m$$

alors que le potentiel électrostatique en ce point est égal à

$$V = 4.5Volt$$

4. on voit bien sur la figure ci-dessus que le moment dipolaire s'écrit

$$\vec{p} = -p\cos\theta\vec{u}_r + p\sin\theta\vec{u}_\theta$$

et

$$\vec{E} = E_r\cos\theta\vec{u}_r + E_\theta\sin\theta\vec{u}_\theta$$

Si le champ électrique est perpendiculaire au moment dipolaire, on aura

$$\vec{E}\cdot\vec{p} = 0$$

ou encore

$$-\frac{2p^2\cos^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{2p^2\sin^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = 0$$

Cela donne

$$-2\cos^2\theta + \sin^2\theta = 0$$

ou encore

$$-3\cos^2\theta + 1 = 0$$

On obtient enfin

$$\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \pm 55^{\circ}$$

Les points recherchés sont donc situés sur les droites faisant un angle 55° et -55° avec la direction du dipôle.

Exercice 08 :(A,B,C)

$+\delta$

H

-2δ $\theta = 104.30$

O

H

$+\delta$

Figure 8 – La molécule d'eau modélisée comme deux dipôles électrostatiques.

La liaison entre l'atome H et l'atome O dans la molécule d'eau n'est pas parfaitement covalente : elle a comme même un caractère ionique partiel. En fait, l'électron qui participe à la liaison passe plus de temps au voisinage de O que de H, puisque l'atome O est plus électronégatif et a tendance à attirer la charge négatif. C'est comme si l'atome H a perdu une partie de sa charge électrique au profit de l'atome O, ce qui est modélisé par une charge partielle négative $-\delta e$ sur l'atome O et une charge partielle positive $+\delta e$ sur l'atome H. Par conséquent, la molécule d'eau est le siège de deux dipôles électrostatiques partant de l'atome O et pointant chacun vers l'atome H, avec des moments dipolaires $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$, respectivement. Le moment dipolaire total de la molécule d'eau est donné par :

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

avec

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2\,p_1\,p_2\,\cos\theta$$

où θ est l'angle entre les deux doublets $O - H$ et $p_1 = p_2 = p_0$. On écrit donc :

$$p^2 = 2\,p_0^2 + 2\,p_0^2\cos\theta = 2p_0^2(1+\cos\theta) = 4p_0^2\cos^2(\frac{\theta}{2})$$

ou encore

$$p = 2p_0\cos(\frac{\theta}{2})$$

avec

$$p_0 = q\,a$$

où $q = \alpha e$ est la valeur absolue de la charge partielle sur l'atome O (ou H) et e la charge électrique de l'électron et a la distance entre les deux atomes O et H. On a donc

$$p_0 = \alpha e\,a = \frac{p}{2\cos(\frac{\theta}{2})}$$

ce qui nous permet d'obtenir

$$\alpha = \frac{p}{2e\,a\cos(\frac{\theta}{2})} = 0.32$$