

ÉCOLE PRÉPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES DE TLEMCCEN

Département de Physique

Corrigé de la série de TD N° 4

EXERCICE 01 :

1. L'expression du flux Φ du champ électrique à travers une surface fermée est donnée par :

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Pour calculer le flux du champ électrique créé par une charge électrique au centre d'un cube d'arête a , nous nous proposons de calculer ce même flux à travers deux surfaces sphériques : la première d'une sphère, inscrite dans le cube, de rayon $\frac{a}{2}$ et la deuxième d'une sphère, circonscrite dans le cube, de rayon $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ (voir figure 1).

Rappelons qu'un champ électrique créé par une charge q a la même intensité sur une surface sphérique dont le centre est confondu avec la position de la charge (symétrie sphérique), et que sa direction est radiale, d'où

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \vec{u}_r \quad \text{sur une surface sphérique de rayon } \frac{a}{2}$$

et que le vecteur de la surface élémentaire est donné par

$$d\vec{S} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$$

Pour la première sphère de rayon $\frac{a}{2}$ on a donc

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{q}{\epsilon_0}$$

C'est un résultat très important, car on vient de trouver que le flux à travers une surface sphérique ne dépend pas du rayon de la sphère ; ce qui nous amène à conclure que le flux à travers la surface de la sphère circonscrite au cube et de rayon $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ est, lui aussi, égal à $\frac{q}{\epsilon_0}$. Rappelons à ce niveau que la surface du cube se trouve complètement entre les deux surfaces et qu'aucune source de charge n'existe entre ces deux dernières. C'est à dire que le flux sortant de la petite surface fermée va obligatoirement traverser la surface du cube pour ensuite sortir, sans changement, à travers la grande surface. On déduit donc que le flux à travers la surface

fermée du cube est aussi égal à $\frac{q}{\epsilon_0}$. D'autre part, puisque la charge est au centre du cube, le flux a la symétrie du cube c'est à dire pas de direction privilégiée, et donc à travers une face du cube sort le sixième (le cube a six faces) du flux, ou encore

$$\Phi_{\text{une face}} = \frac{1}{6}\Phi_{\text{total}} = \frac{1}{6}\frac{q}{\epsilon_0}$$

Nous venons de montrer sur un exemple simple que le flux du champ électrique à travers une surface fermée quelconque est toujours égal à la charge à l'intérieur du volume délimité par cette même surface. C'est bien là l'énoncé du théorème de Gauss pour le flux d'un champ électrique.

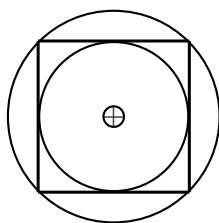


FIGURE 1 – Une charge électrique positive placée au centre d'un cube d'arête a . Deux surfaces sphériques sont représentées : la première est d'une sphère, inscrite dans le cube, de rayon $\frac{a}{2}$ et la deuxième d'une sphère, circonscrite dans le cube, de rayon $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

2. Pour calculer le flux à travers un cube d'arête a d'un champ électrostatique dû à une charge q placée au centre de l'une des faces du cube, on peut imaginer deux cubes mis côte à côte et dont la face commune entre eux est celle sur laquelle est positionnée la charge q .

Selon le théorème de Gauss, le flux à travers la surface fermée externe des deux cubes (à l'exception de la face interne entre les deux cubes) est égale à $\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$. Remarquons aussi que

le flux du champ électrique à travers la surface de la face commune entre les deux cubes est nul $\phi_{\text{face commune}} = 0$, car le champ électrique est parallèle au plan de cette surface (il est donc normal au vecteur de l'élément de la surface en tout point sur ce plan). Il nous reste donc 10

faces, 5 pour chaque cube. Le flux à travers les 10 faces est donc égal à $\phi_{10 \text{ faces}} = \frac{q}{\epsilon_0}$. Les deux

surfaces sont symétriques par rapport à la charge, ce qui nous permet de conclure que le flux à travers les 5 faces d'un cube est égal à la moitié du flux à travers les 10 faces, à savoir :

$\phi_{5 \text{ faces}} = \frac{q}{2\epsilon_0}$. On peut conclure que

$$\phi_{\text{cube}} = \phi_{\text{face commune}} + \phi_{5 \text{ faces}} = 0 + \frac{q}{2\epsilon_0} = \frac{q}{2\epsilon_0}$$

Imaginons maintenant qu'au lieu d'une seule charge sur la face, on a toute une distribution surfacique de charges σ telle que $q = \iint \sigma dS$. Chaque élément de charge $dq = \sigma ds$ crée dans l'espace un champ électrique dont le flux à travers les 6 faces du cube est égal à

$$d\phi = \frac{dq}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma dS}{2\epsilon_0}$$

Selon le principe de superposition, le flux créé par la charge totale sur la surface est égal à la somme des flux créés par les éléments dq , ce qui est obtenu par l'intégration sur $d\phi$:

$$\phi = \iint \frac{dq}{\epsilon_0} = \iint \frac{\sigma dS}{2\epsilon_0} = \frac{q}{2\epsilon_0}$$

EXERCICE 02 :

1. Pour appliquer le théorème de Gauss, on doit choisir une surface dite de Gauss à travers laquelle on calculera le flux du champ électrique, et qui, de plus, aura la symétrie du problème. Dans notre cas, on a une sphère de rayon R chargée avec une distribution volumique constante ρ . La symétrie du problème réside dans le fait que le champ électrique créé par cette distribution doit être radial et a une symétrie sphérique. En effet, isolons par imagination un élément de charge dans le volume et voyons ce qu'il crée comme champ électrique en un point à l'extérieur du volume. Ce dernier n'est pas radial ; mais en faisant la somme (continue) des éléments de volume autour de l'axe qui relie le point de mesure au centre de la sphère nous remarquons que le champ électrique résultant est suivant cet axe, c'est à dire radial. On peut penser aussi qu'à une position lointaine de la sphère, la charge portée par celle-ci apparait comme une charge ponctuelle, avec tout ce que cela implique pour l'allure du champ électrique. Choisissons donc une surface de Gauss imaginaire qui soit sphérique avec un centre confondu avec le centre de la sphère réelle.

- (a) pour calculer le champ électrique à l'intérieur de la sphère prenons une surface sphérique de rayon $r < R$ (voir figure 2) :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\text{charge contenue dans une sphère de rayon } r}{\epsilon_0}$$

Remarquons que sur cette surface sphérique choisie, le champ électrique est radial, d'où

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r \cdot dS$$

et ne dépend ni de θ ni de φ de la surface, ce qui nous permet de sortir E_r de l'intégrale

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r \oint dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta = E_r 4\pi r^2$$

D'autre part, la quantité de charge contenue dans le volume délimité par la surface de Gauss choisie est égale à

$$Q_{\text{intérieur}} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

Ce n'est pas la totalité de charge qui est prise en considération, mais juste la partie contenue dans le volume délimité par la surface de Gauss qu'on a choisie. Notons que la charge totale est donnée par

$$Q_{\text{totale}} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

En égalant les deux membres, on trouve

$$E_r 4\pi r^2 = \rho \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \left(\frac{r}{R}\right)^3 = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{totale}} \left(\frac{r}{R}\right)^3$$

ou encore

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{totale}}}{R^3} r$$

- (b) pour calculer le champ électrique à l'intérieur de la sphère prenons une surface sphérique de rayon $r > R$ (voir figure 2) :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\text{charge contenue dans une sphère de rayon } r}{\epsilon_0}$$

En utilisant les mêmes arguments de symétrie que précédemment, tout en remarquant que cette fois-ci la charge contenue dans le volume délimité par la surface de Gauss choisie est elle même la charge totale, on trouve

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{totale}}$$

ou encore

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{totale}}}{r^2}$$

L'allure du champ électrique radial en fonction de r est donnée dans la figure 3.

2. en utilisant le théorème de Gauss, et en considérant les analogies suivantes (voir table 1)

$$\frac{1}{\epsilon_0} \equiv -4\pi G \quad \text{et} \quad \vec{E} \equiv \vec{g} \quad \text{et} \quad q \equiv M_T$$

où ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide, G la constante gravitationnelle, \vec{E} le champ électrique, \vec{g} le champ d'accélération gravitationnelle, q la charge électrique et M_T masse de la terre, l'expression du champ d'accélération gravitationnelle \vec{g} à l'intérieur de la terre ($r < R_T$) est donnée par

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_T$$

ou encore

$$g_r 4\pi r^2 = -4\pi G \frac{4}{3} \pi r^3 \mu_0$$

où μ_0 est la masse volumique de la terre, supposée constante. On obtient donc

$$g_r = -4\pi G \frac{4}{3} \pi r \mu_0 = -G \frac{4}{3} \pi R^3 \mu_0 \frac{r}{R^3} = -G M_T \frac{r}{R^3}$$

Le vecteur \vec{g} est donné par

$$\vec{g} = -G M_T \frac{r}{R^3} \vec{u}_r$$

c'est à dire pointant vers le centre de la terre.

A l'extérieur de la terre,

$$g_r 4\pi r^2 = -4\pi G \frac{4}{3} \pi R^3 \mu_0 = -4\pi G M_T$$

ou encore

$$g_r = -G \frac{M_T}{r^2}$$

et

$$\vec{g} = -G \frac{M_T}{r^2} \vec{u}_r$$

Ainsi, la terre crée à l'extérieur un champ gravitationnel identique à celui d'une masse ponctuelle M_T placée au centre de la terre.

Électrique	Gravitationnelle
q (charge)	m (masse)
$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ (force)	$\vec{F}_{1/2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ (force)
$\frac{1}{4\pi\epsilon}$	$-G$ (constante gravitationnelle)
$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ (champ électrique)	$\vec{g} = -G \frac{m_1}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ (champ d'accélération gravitationnelle)
$\Phi_e = \frac{q_1}{\epsilon}$ (flux électrique)	$\Phi_g = (-4\pi G) m_1$ (flux gravitationnel)

TABLE 1 – Analogie électrostatique-gravitation

Pour l'application numérique, on considère la masse de la terre estimée à $5,9736 \times 10^{24} kg$, la constante gravitationnelle égale à $G = 6,67384 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ et le rayon de la terre $R_T = 6371 km$, d'où l'intensité du champ gravitationnel à la surface de la terre est égale à

$$g_r = 6,67384 \times 10^{-11} \frac{5,9736 \times 10^{24}}{(6371 \times 10^3)^2} = 9,8219 m.s^{-2}$$

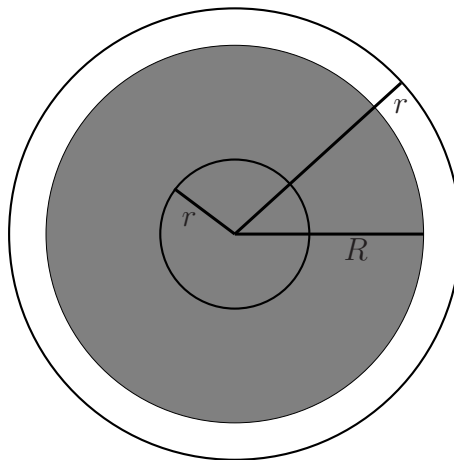


FIGURE 2 – Sphère de rayon R chargée uniformément avec une charge volumique ρ , et deux surfaces de Gauss sphériques de rayon $r : r < R$ et $r > R$.

EXERCICE 03 :

1. puisque le plan est supposé infini le champ électrique doit être dans les deux directions suivant la normale au plan. En effet, à tout élément de surface contenant une dq sur le plan créant un champ électrique en un point M , correspond un autre élément de surface symétrique à celui-ci par rapport à la droite reliant le point M et le plan selon la normale, qui crée un champ électrique de même intensité mais dans une direction telle que la somme des deux champs a

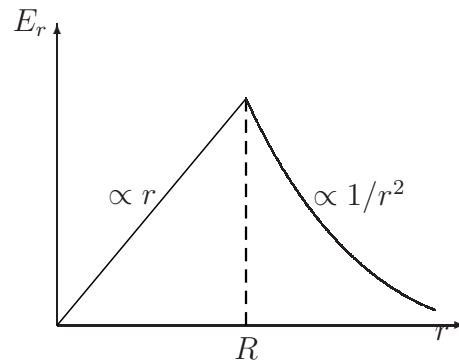


FIGURE 3 – Allure de la composante radiale du champ électrique créé par une charge électrique de distribution volumique constante ρ contenue dans une sphère de rayon R .

une composante suivant la normale. Il est donc convenable de choisir une surface de Gauss sous forme d'une surface d'un cylindre de hauteur L et dont les deux surfaces de base (deux disques de rayon r) sont parallèles au plan (voir figure 6). On a donc trois surfaces à travers lesquelles le flux du champ électrique passera : une surface latérale $S_L = 2\pi r L$ et deux surfaces de base $S_{1,2} = \pi r^2$. Donc, le flux électrique à travers cette surface fermée est, selon le théorème de Gauss, égal à

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \int_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{int} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \pi r^2$$

puisque la charge contenue dans le volume du cylindre délimité par la surface de Gauss imaginée est justement la charge contenue dans la surface obtenue par intersection du plan avec le cylindre.

Notre choix de la surface nous permet donc d'obtenir un flux nul à travers la surface latérale du cylindre car le champ électrique y est perpendiculaire à la surface en tout point :

$$\int \int_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{car} \quad \vec{E} = E_z \vec{u}_z \quad \text{et} \quad d\vec{S} = dS \vec{u}_r$$

D'autre part, le flux électrique à travers les deux surfaces de base est donné par

$$\int \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \int_{S_1} E \cdot dS = E_z(z) \int \int_{S_1} dS = E_z(z) \pi r^2$$

car sur S_1 le vecteur du champ électrique est égal à $\vec{E} = E_z(z) \vec{u}_z$ et $d\vec{S}_1 = dS_1 \vec{u}_z$, et

$$\int \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \int_{S_2} E \cdot dS = E_z(-z) \int \int_{S_2} dS = E_z(z) \pi r^2$$

car sur S_2 le vecteur du champ électrique est impair et est égal à $\vec{E} = E_z(-z) \vec{u}_z = -E_z(z) \vec{u}_z$ et $d\vec{S}_2 = -dS_2 \vec{u}_z$. Le flux électrique à travers la surface de Gauss est donné par

$$2 E_z(z) \pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \pi r^2$$

d'où

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Dans des régions proches du plan chargé le champ électrique est constant.

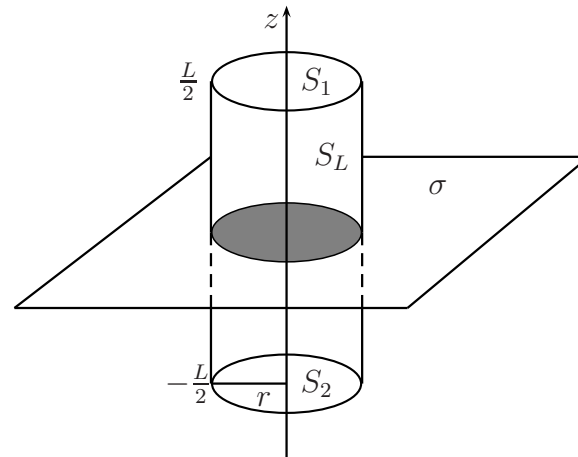


FIGURE 4 – Surface de Gauss sous forme d’une surface d’un cylindre de longueur L et de rayon de base r .

2. considérons maintenant deux plans parallèles supposés infinis, dont la normale est suivant l’axe des z , l’un portant une charge surfacique σ (charge positive) et l’autre portant une charge surfacique $-\sigma$ (charge négative) (voir figure 7). Selon le résultat ci-dessus, le plan portant une charge positive crée un champ électrique

$$\vec{E}_1 = E_z(z)\vec{u}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$$

alors que le plan portant une charge négative crée un champ électrique

$$\vec{E}_2 = E_z(z)\vec{u}_z = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$$

Remarquons que les deux champs électriques entre les deux plans s’ajoutent

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_z$$

alors qu’ils s’annulent mutuellement en dehors des plans

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}$$

EXERCICE 04 :

Une coquille creuse est caractérisée par une densité de charge

$$\rho(r) = \frac{k}{r^2}$$

dans la région $R_1 < r < R_2$ et nulle ailleurs, où k est une constante.

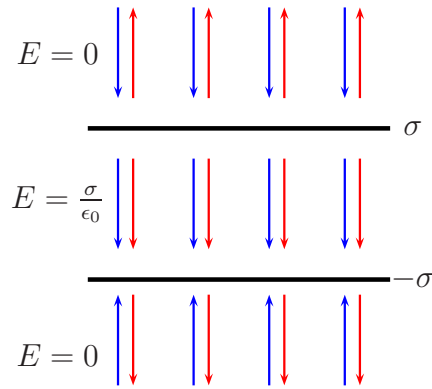


FIGURE 5 – Champ électrique créé par deux plans parallèles, l'un portant une charge surfacique positive σ et l'autre portant une charge surfacique négative $-\sigma$. Le champ en bleu, constant partout, est créé par la charge négative et est égal à $E = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}$, alors que le champ en rouge, constant partout lui aussi, est créé par la charge positive et est égal à $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. En utilisant le principe de superposition, on obtient un champ égal à $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ entre les eux plans et un champ nul en dehors des plans.

1. Le problème posé a une symétrie sphérique, ce qui fait que le champ électrique devrait avoir la même intensité sur une sphère de rayon r et dont le centre est confondu avec le centre de la coquille. Le champ électrique devrait aussi avoir une seule composante radiale : $\vec{E} = E_r \vec{u}_r$. La surface de Gauss qui convient le plus serait donc une surface sphérique de rayon r (voir figure 8).
 - (a) pour $r < R_1$: le flux électrique à travers la surface de Gauss est nul car il n'existe aucune charge à l'intérieur du volume délimité par la surface choisie, d'où

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Le champ électrique sur la surface choisie a la même intensité, ce qui nous permet d'écrire

$$E_r \oint dS = 0 \quad \text{ou encore} \quad E_r = 0$$

Le champ électrique à l'intérieur d'une sphère creuse est nul.

- (b) pour $R_1 < r < R_2$:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(r') dV' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{R_1}^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{k}{r'^2} r'^2 dr' d\theta \sin \theta d\varphi = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi k \int_{R_1}^r dr' = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi k (r - R_1)$$

Puisque le champ électrique a la même intensité sur une surface sphérique de rayon r et que les vecteurs unitaires portant l'élément de surface et le champ électrique sont dans la même direction, on peut écrire

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E_r \cdot dS = E_r \oint dS = E_r 4\pi r^2$$

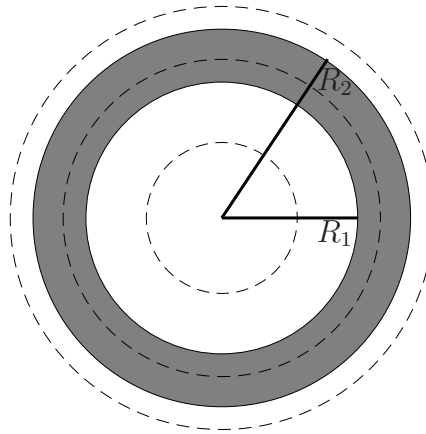


FIGURE 6 – Une coquille creuse caractérisée par une densité de charge $\rho(r) = \frac{k}{r^2}$ entre R_1 et R_2 . Les surfaces de Gauss (sphères en lignes discontinues) pour différentes régions de la coquille sont représentées.

en égalant les deux membres de la loi de Gauss, on obtient donc

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi k(r - R_1)$$

ou encore

$$E_r = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{k(r - R_1)}{r^2}$$

et le champ électrique

$$\vec{E} = E_r \vec{u}_r = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{k(r - R_1)}{r^2} \vec{u}_r$$

(c) pour $r > R_2$:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(r') dV' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{k}{r'^2} r'^2 dr' d\theta \sin\theta d\varphi = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi k \int_{R_1}^{R_2} dr' = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi k(R_2 - R_1)$$

car le volume délimité par la surface de Gauss contient la totalité de la charge sur la sphère.

D'autre part

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E_r \cdot dS = E_r \oint dS = E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi k(R_2 - R_1)$$

ou encore

$$\vec{E} = E_r \vec{u}_r = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{k(R_2 - R_1)}{r^2} \vec{u}_r$$

2. la variation du champ électrique en fonction de r est représenté sur la figure 8.
3. en voulant calculer la force électrique à laquelle est soumise cette même distribution de charges, il faut se rappeler qu'il s'agit de la force appliquée par une distribution de charges sur elle même ! Imaginons un élément de volume dV de la coquille contenant une charge $dq = \rho dV$, laquelle

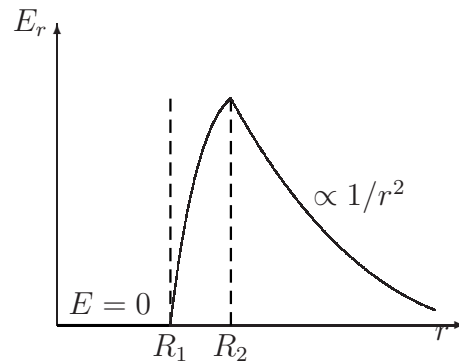


FIGURE 7 – Allure de la composante radiale du champ électrique créé par une charge électrique de distribution volumique constante ρ contenue dans une coquille creuse.

est soumise à deux forces : une force due aux charges des autres parties de la coquille et une deuxième force due à la charge contenue dans l'élément lui-même. Concernant la deuxième force, on doit noter que les forces appliquées mutuellement entre les charges contenues dans le volume dV (vu comme un seul système) s'annulent (principe d'action et de réaction de Newton), et c'est ainsi que le volume élémentaire ne peut pas se faire pousser par lui-même ! Cela simplifie le calcul puisqu'il nous permet d'inclure le champ électrique créé par toutes les charges y compris les charges du volume élémentaire dV . En effet la force appliquée sur un volume dV par la distribution est égale à

$$d\vec{F} = dq\vec{E}$$

où \vec{E} est le champ électrique créé par la totalité de la charge à l'endroit où dq est placée. Puisque $dq = \rho dV$, l'expression de la force devient

$$d\vec{F} = \rho\vec{E} dV = \rho\vec{E} dr dS$$

Il est utile de calculer la force par unité de surface appliquée par la distribution de charge sur elle-même, d'où

$$\vec{F} = \int \rho\vec{E} dr = \frac{k^2}{\epsilon_0} \left[\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} \frac{(r - R_1)}{r^2} dr \right] \vec{u}_r$$

ou encore

$$\vec{F} = \frac{k^2}{\epsilon_0} \left[\int_{R_1}^{R_2} \frac{(r - R_1)}{r^4} dr \right] \vec{u}_r = \frac{k^2}{\epsilon_0} \left[\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^3} - R_1 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^4} \right] \vec{u}_r = \frac{k^2}{\epsilon_0} \left[\frac{4R_1}{R_2^5} - \frac{1}{R_1^4} - \frac{3}{R_2^4} \right] \vec{u}_r$$

Cette force pointe toujours vers l'extérieur de la sphère quelque soit la polarité des charges (positive ou négatives). Pour que ces charges se maintiennent à leurs positions, il doit y avoir une autre force, non incluse ici, qui contrebalance la force appliquée par la distribution des charges et qui est évidemment dans la direction opposée.

EXERCICE 05 :

Une sphère, de rayon R , porte une charge volumique ρ qui est répartie uniformément dans tout le volume qu'elle occupe à l'exception d'une cavité de rayon a . Le centre de cette cavité est à la distance d du centre de la sphère. La cavité est vide de charges.

1. ce cas physique montre bien les limites de l'application directe du théorème de Gauss, puisque la distribution de la charge dans la sphère n'a pas la symétrie sphérique requise pour que le champ électrique soit radial et ait une symétrie sphérique. Rappelons que ce sont là exactement les conditions qui nous permettraient à chaque fois de simplifier le calcul de l'intégrale $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$ en passant du produit vectoriel à un produit de deux scalaire, à savoir $\oint E dS$ (car le champ électrique était radial en tout point), puis en faisant sortir le champ électrique de l'intégrale : $E \oint dS$ (le champ électrique est le même sur toute la surface sphérique). Pour contourner ce problème, on peut modéliser la cavité sphérique de rayon a creusée dans la sphère de rayon R comme étant la superposition d'une sphère chargée de rayon a , de centre O_2 et de densité $-\rho$, et d'une sphère de rayon R de centre O_1 et de densité volumique $+\rho$ sur tout son volume. La superposition d'une charge négative $-\rho$ et d'une charge $+\rho$ sur une sphère de rayon a donne une charge nulle sur cette sphère ; ce qui est le cas ici (voir figure 9). Le champ électrique \vec{E}_1 créé par la distribution $+\rho$ supposée répartie sur la totalité du volume de la sphère de rayon R en un point M est radial, divergent (car la charge est positive) et a une symétrie sphérique (voir figure 10). D'autre part, le champ électrique \vec{E}_2 créé par la distribution $-\rho$ supposée répartie sur le volume de la cavité de rayon a au même point M est aussi radial, convergent (car la charge est négative) et a une symétrie sphérique. En appliquant le principe de superposition au point M de la cavité, on obtient

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$$

avec

$$\vec{E}_1(M) = E_1(M) \vec{u}_1 \quad \text{avec} \quad \vec{u}_1 = \frac{\overrightarrow{O_1M}}{r_1}$$

et

$$\vec{E}_2(M) = E_2(M) \vec{u}_2 \quad \text{avec} \quad \vec{u}_2 = \frac{\overrightarrow{O_2M}}{r_2}$$

Pour calculer la composante radiale du champ électrique $E_1(M)$ on utilise une surface de Gauss (contenant le point M) de rayon r_1 et de centre O_1 , d'où

$$\oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = E_1(M) \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} \rho r_1^3 \quad \Rightarrow E_1(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_1$$

et pour calculer la composante radiale du champ électrique $E_2(M)$ on utilise une surface de Gauss (contenant le point M) de rayon r_2 et de centre O_2 , d'où

$$\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = E_2(M) \cdot 4\pi r_2^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} (-\rho) r_2^3 \quad \Rightarrow E_2(M) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r_2$$

Le champ électrique total en M est donné par

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_1 \vec{u}_1 - \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_2 \vec{u}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_1 \frac{\overrightarrow{O_1M}}{r_1} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_2 \frac{\overrightarrow{O_2M}}{r_2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1M} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_2M}$$

ou encore

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{MO_2} \right) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1O_2}$$

2. on remarque bien que le champ électrique à l'intérieur de la cavité est uniforme. Il a la même valeur $E_1(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} d$ partout dans la cavité, et y est dirigé suivant $\overrightarrow{O_1O_2}$

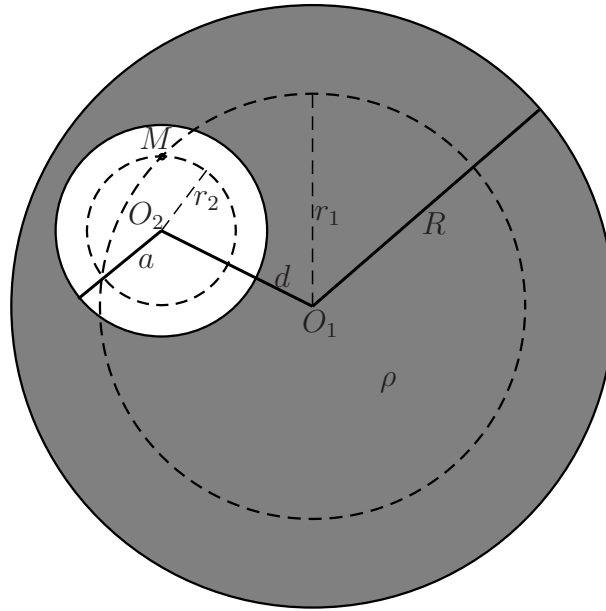


FIGURE 8 – Une sphère, de rayon R , porte une charge volumique ρ répartie uniformément dans tout le volume qu'elle occupe à l'exception d'une cavité de rayon a . Le centre de cette cavité est à la distance d du centre de la sphère. Les deux surfaces de Gauss de rayons r_1 et r_2 contenant chacune le point M .

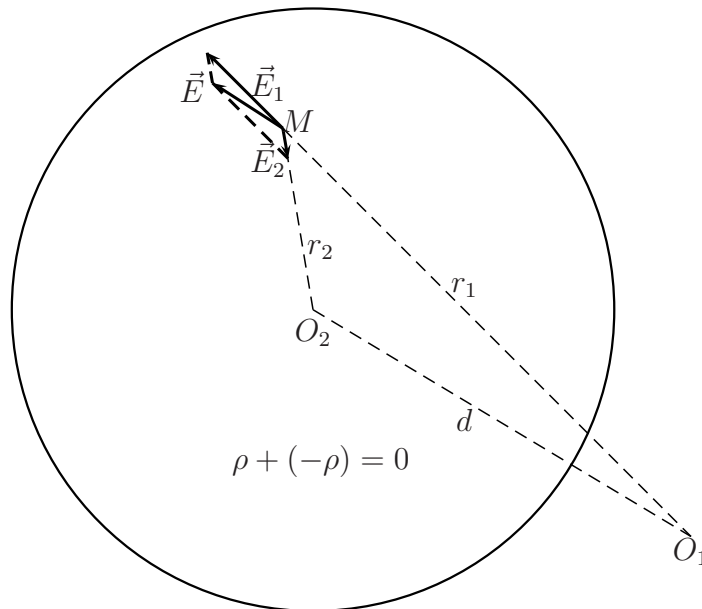


FIGURE 9 – Champ électrique dans une cavité non chargée de rayon a , entourée par une charge électrique de distribution volumique constante ρ .