École Préparatoire en Sciences et Techniques de Tlemcen

Département de Physique

Physique II - Corrigé de la série N° 3

Exercice 01 :(Fait en cours)

Le rapport entre la force de répulsion électrique et la force de gravitation attractive entre deux particules α est donné par :

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K\frac{q_\alpha^2}{r^2}}{G\frac{m_\alpha^2}{r^2}}$$

où $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ est une constante de proportionnalité égale à $K = 9 \times 10^9\, N.m^2.C^{-2}$ avec ϵ_0, la permittivité diélectrique du vide égale à $\epsilon_0 \approx 8.85418 \times 10^{-12}\, kg^{-1}.m^{-3}.A^2.s^4$ ou encore $Farad.m^{-1}$, G la constante gravitationnelle égale à $G = 6.67384 \times 10^{-11}\, m^3.kg^{-1}.s^{-2}$, q_α la charge de la particule α égale à $+2e = 3.2 \times 10^{-19}\, C$, m_α la masse de la particule α égale à $6.64 \times 10^{-27}\, kg$ et r la distance entre deux particules α.
Le rapport devient

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K}{G}\frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} = \frac{9 \times 10^9}{6.67384 \times 10^{-11}}\frac{(3.2 \times 10^{-19})^2}{(6.64 \times 10^{-27})^2} \approx 3.3 \times 10^{35}$$

Comme on peut le constater, la force électrique est très très forte devant la force de gravité. Un particule α va donc acquérir une accélération égale à $a = \frac{F_e}{m_\alpha}$ qui est énorme. Le même raisonnement est valable pour toutes les particules massiques chargées qui constituent la matière. Mais comment avec une telle accélération entre charges la matière arrive toujours à se maintenir. La force de gravité à l'échelle atomique est trop faible pour permettre aux particules de se maintenir contre la force électrique gigantesque. Alors qu'est ce qui fait que les atomes ont toujours cette possibilité de se regrouper dans des structures cristallines ou non ? La réponse réside dans le fait qu'il existe deux types de charges : positives et négatives. Celles de même charge se repoussent et celles de charges différentes s'attirent, contrairement au cas de la gravité ou il y a seulement attraction.

R. Feynman expliquait ceci en disant : " *un amas d'éléments positifs se repousserait avec une force énorme et éclaterait dans toutes les directions. Un amas d'éléments négatifs en ferait autant. Mais un mélange égal d'éléments positifs et négatifs ferait quelque chose de tout à fait différent. Les éléments opposés seraient maintenus ensemble par des attractions énormes. Le résultat global serait que les forces terrifiantes s'équilibreraient entre elles presque parfaitement en formant des mélanges fins et serrés d'éléments positifs et négatifs, et entre deux amas d'un tel mélange, il n'y aurait pratiquement* *pas du tout d'attraction ou de répulsion. L'équilibre est si parfait cependant, que lorsque vous vous tenez près de quelqu'un d'autre, vous ne sentez aucune force. S'il y avait un très léger déséquilibre vous le sauriez. Si vous vous teniez à un bras de distance de quelqu'un et que chacun de vous ait un pour cent d'électrons de plus que de protons, la force de répulsion serait incroyable, suffisante pour soulever la Terre entière !*

Avec des forces aussi énormes et aussi parfaitement équilibrées dans ce mélange intime, it n'est pas difficile de comprendre que la matière, essayant de garder ses charges positives et négatives dans le meilleur équilibre, puisse avoir une grande rigidité et une grande résistance.

D'autre part, le noyau contient plusieurs protons qui sont tous positifs. Pourquoi ne se repoussent ils pas ? II s'avère que dans le noyau il y a, en plus des forces électriques, des forces non électriques, appelées forces nucléaires, qui sont plus grandes que les forces électriques et qui sont capables de maintenir les protons ensemble malgré la répulsion électrique. Les forces nucléaires, cependant, sont à court rayon d'action - leur intensité décroit beaucoup plus rapidement que $\frac{1}{r^2}$. Et ceci a une conséquence importante. Si un noyau contient trop de protons, it devient gros, rendant l'équilibre si fragile que le noyau est presque prêt a éclater sous l'action de la force électrique de répulsion "

Autre effet de ce mélange de charges positives et charges négatives est le phénomène appelé "écrantage" (screening). En effet, la force électrique 'sentie' par les charges au sein d'un gaz ou un conducteur due à la présence d'autre charges n'a plus l'allure en $\frac{1}{r^2}$ mais plutôt en $e^{-r/\lambda}$, λ étant un paramètre dépendant du milieu considéré.
Enfin, on peut résumer tout ça en disant que :

1. les forces nucléaires dominent sur une échelle nucléaire de l'ordre de $10^{-15}\,m$ appelé femtomètre. Elles assurent la cohésion des noyaux.
2. les forces électrique dominent sur une échelle de $10^{-10}\,m$ appelé Angström. Ce sont ces forces-là qui assurent la cohésion des atomes, des molécules, et partant la matière.
3. les forces magnétiques sont plus faibles que les forces électriques, mais sont dominantes à l'échelle du système solaire.
4. les forces de gravité sont responsable de plusieurs manifestations naturelles : la chute des corps, les marées, l'orbite des planètes autour du Soleil, la sphéricité de la plupart des corps. Elle est dominante à l'échelle des distances astronomiques.

Exercice 02 :(A,B,C)

La position d'équilibre du système est donnée par

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

où $\sum \vec{F} = \vec{0}$ est la somme des forces appliquées séparément sur l'un des objets du problème, à savoir la masse et les deux ballons. Commençant par la masse m. En effet les forces qui s'appliquent sur la masse sont : son poids $\vec{P}$ les deux tensions des fils $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$, la poussée d'Archimède étant négligeable. Ce qui nous permet d'écrire

$$\vec{P} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$$

Par projection sur l'axe vertical, on tire :

$$2\,T\sin(\alpha) - P = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{P}{2\,\sin(\alpha)}$$

Les forces s'appliquant sur l'un des ballons sont : la force électrostatique exercée par le deuxième ballon chargée $\vec{F}$, la tension du fil $\vec{T_1}$ et la poussée d'Archimède $\vec{R}$, puisque le ballon baigne dans l'air.

$$\vec{F} + \vec{T_1} + \vec{R} = \vec{0}$$

Par projection sur l'axe horizontal, on tire :

$$F - T\cos(\alpha) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F = T\cos(\alpha)$$

En combinant les deux équations ci-dessus, on trouve

$$F = \frac{P\,\cos(\alpha)}{2\,\sin(\alpha)} = \frac{P}{2}\cot(\alpha)$$

D'après la loi de Coulomb, la force électrostatique qu'exerce l'un des ballons de charge q sur le deuxième ballon de même charge q séparés par une distance r est donnée par

$$F = K\frac{q\,q}{r^2}$$

En l'égalant à l'équation ci-dessus, on trouve

$$K\frac{q\,q}{r^2} = \frac{P}{2}\cot(\alpha)$$

ou encore

$$q = r\sqrt{\frac{P\,\cot(\alpha)}{2\,K}}$$

avec

$$r = 2\,l\cos(\alpha)$$

L'expression de la charge devient donc

$$q = 2\,l\cos(\alpha)\sqrt{\frac{P\,\cot(\alpha)}{2\,K}}$$

En remplaçant dans l'équation ci-dessus par les valeurs numériques suivantes :

$$P = 5\times10^{-2}\,N\,,$$

$$\cot(\frac{\pi}{6}) = 1.732,$$

$$K = 9\times10^{9}\,N.m^2.C^{-2}$$

et

$$2\,l\cos(\alpha) = 1.732\,m$$

on trouve la valeur numérique de la charge sur un ballon égale à

$$q = 3.8\times10^{-6}\,C\ = 3.8\,\mu C$$

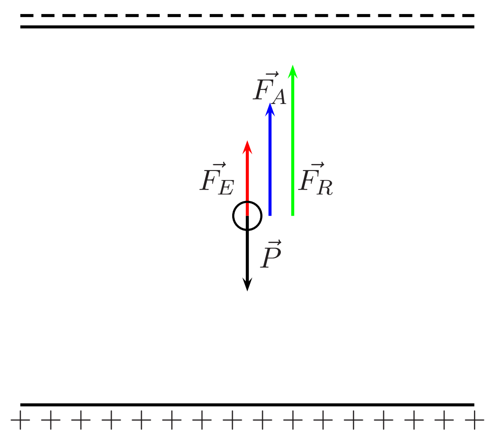

FIGURE 1 – Les quatre forces appliquées sur la gouttelette d'huile.

EXERCICE 03 :(A,B,C)(Expérience de Millikan)

Dans le cas d'une modélisation simple, une gouttelette d'huile est soumise à quatre forces :

1. son poids : $\vec{P} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_h \vec{g}$ où r est le rayon de la gouttelette, ρ_h la masse volumique de l'huile et $\vec{g}$ le vecteur accélération de la pesanteur ;
2. la force électrostatique : $\vec{F_E} = q\vec{E}$ avec q la charge de la gouttelette et $\vec{E}$ le champ entre les armatures ;
3. la poussée d'Archimède :$\vec{F_A} = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a \vec{g}$ avec ρ_a la masse volumique de l'air ;
4. la force de traînée (résistance de l'air) dont l'expression dans le cas de faibles vitesses est donnée par la loi de Stokes : $\vec{F_R} = -6\pi\eta r\vec{v}$ avec η le coefficient de viscosité de l'air et $\vec{v}$ vecteur vitesse de la gouttelette.

Rappelons que la viscosité est définie comme la résistance à l'écoulement uniforme et sans turbulence se produisant dans la masse d'une matière. Lorsque la viscosité augmente, la capacité du fluide à s'écouler diminue. La viscosité d'un fluide varie en fonction de sa température et des actions mécaniques auxquelles il est soumis.

1. le principe fondamental de la dynamique en projection sur un axe vertical s'écrit donc :

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^3 \mathrm{g}(\rho_h - \rho_a) - q\,E - 6\pi\eta r\,v$$

Ceci est une équation différentielle linéaire du premier ordre non homogène, qu'on peut la réécrire sous la forme

$$\frac{dv}{dt} = A - B\,v$$

ou encore

$$\frac{dv}{dt} + B\,v = A$$

avec

$$A = \frac{4}{3m}\pi r^3 \mathrm{g}(\rho_h - \rho_a) - \frac{q}{m}\,E$$

et

$$B = \frac{6\pi\eta r}{m}$$

La solution de l'équation différentielle ci-dessus est la somme de deux solutions :
Solution sans second membre de l'équation

$$\frac{dv}{dt} + B\,v = 0$$

et une solution particulière qui aura la forme du second terme, c'est à dire une constante.
En effet,

$$\frac{dv}{dt} + B\,v = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{dv}{dt} = -B\,v$$

ou encore

$$\frac{dv}{v} = -B\,dt$$

Après intégration on trouve

$$\ln(v(t)) = -B\,t + cste$$

ou encore

$$v(t) = C\,\mathrm{e}^{-Bt}$$

où C est une constante à définir par les conditions initiales de la vitesse.
D'autre part, la solution particulière est obtenue en remplaçant dans l'équation différentielle générale la fonction vitesse $v(t)$ par une constante, soit :

$$\frac{dD}{dt} + B\,D = A$$

d'où

$$B\,D = A$$

,

$$\frac{dD}{dt}$$

étant nul. ce qui donne

$$D = \frac{A}{B}$$

La solution générale s'écrit donc :

$$v(t) = C\,\mathrm{e}^{-Bt} + \frac{A}{B}$$

ou encore

$$v(t) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t} + \frac{1}{6\pi\eta r}\left[\frac{4}{3}\pi r^3 \mathrm{g}(\rho_h - \rho_a) - q\,E\right]$$

Par convention, on met $\tau = \frac{m}{6\pi\eta r}$, qui a la dimension d'un temps.

2. en supposant une vitesse initiale nulle, la solution de l'équation donne :

$$v(0) = C + \frac{1}{6\pi\eta r}\left[\frac{4}{3}\pi r^3 \mathrm{g}(\rho_h - \rho_a) - q\,E\right] = 0$$

ou encore

$$C = -\frac{1}{6\pi\eta r}\left[\frac{4}{3}\pi r^3 \mathrm{g}(\rho_h - \rho_a) - q\,E\right]$$

en remplaçant la constante C par son expression dans l'expression de $v(t)$, celle-ci devient

$$v(t) = \frac{1}{6\pi\eta r}\left[\frac{4}{3}\pi r^3 \mathrm{g}(\rho_h - \rho_a) - q\,E\right]\left(1 - \mathrm{e}^{-\tau t}\right)$$

3. La constante du temps τ a un ordre de grandeur très faible ; on peut donc admettre que le régime permanent est atteint de façon instantanée. Autrement dit, la gouttelette atteint très vite une vitesse limite ne dépendant plus du temps qui a pour valeur :

$$v_{\mathrm{lim}}(E) = \frac{1}{6\pi\eta r}\left[\frac{4}{3}\pi r^3 \mathrm{g}(\rho_h - \rho_a) - q\,E\right]$$

Soit $v_0 = v_{\mathrm{lim}}(0)$ la vitesse à champ nul ($E = 0$). On peut alors réécrire

$$v_{\mathrm{lim}}(E) = v_0 - \frac{qE}{6\pi\eta r}.$$

4. l'expression de la charge q est donnée par

$$q = \frac{6\pi\eta r(v_0 - v_{\mathrm{lim}}(E))}{E} = \frac{6\pi.1.8\times10^{-5}.2\times10^{-6}(0.392\times10^{-3} - 0.458\times10^{-3})}{28000} = -\frac{4.4786\times10^{-14}}{28000}$$

ou encore

$$q = -15.99\times10^{-19}C \approx 10e$$

Millikan, par simple mesure de la vitesse par le rapport de la distance parcourue sur le temps mis pour la parcourir sur une gouttelette d'huile qu'il ionisait en l'irradiant par rayons X, observa expérimentalement que les valeurs d'ionisation étaient toutes multiples entières de $e = 1,592\times10^{-19}C$, constante que l'on connaît aujourd'hui sous le nom de charge élémentaire (avec une valeur mise à jour légèrement différente : $e = 1,60217646\times10^{-19}C$ et que l'on note traditionnellement e ; cette expérience s'est avérée être la première preuve de la quantification de la charge électrique qui est strictement toujours un multiple entier positif ou négatif de cette valeur fondamentale e. Cette expérience et ses conclusions sur la quantification des charges valurent à Millikan le Prix Nobel de physique en 1923.

Exercice 04 :(Fait en cours)

1. le champ électrique créé par une charge électrique q placée en $\vec{r}_1$ en un point M repéré par le vecteur position $\vec{r}$ est donné par

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}\vec{u}_{q\to M}$$

où ϵ_0 est la constante diélectrique du vide, $\vec{u}_{q\to M}$ vecteur unitaire porté par la droite reliant la position de la charge avec la position où l'on veut mesurer le champ électrique, égal à

$$\vec{u}_{q\to M} = \frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$$

L'expression du champ électrique s'écrit donc sous la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}-\vec{r}_1)$$

Le champ électrique est mesuré en $N.C^{-1}$ ou encore en $Volt.m^{-1}$. Le champ électrique est radial car représenté par un vecteur porté par la droite reliant la source (charge q) et le point de mesure. Par convention, il est divergent (sortant de la charge) dans le cas d'une charge positive, et convergent (entrant vers la charge) dans le cas d'une charge négative. Sur une surface de rayon r dont le centre coïncide avec la position de la source, l'intensité du champ électrique est la même. On dit que le champ électrique a une symétrie sphérique, car ne dépendant ni de θ ni de φ, mais plutôt en r (voir figure 1.a).

2. Les lignes de champ électriques $\vec{E}$ sont les courbes orientées telles que leur tangente, en chaque point, ait même direction et même sens que le champ électrostatique. Pour établir l'équation d'une ligne de champ, il suffit d'exprimer qu'un élément $\vec{dl}$ de la ligne est parallèle à $\vec{E}$, soit :

$$\vec{dl}\wedge\vec{E} = \vec{0}$$

En explicitant cette équation dans le système des coordonnées sphériques, le plus adapté à cette situation physique (symétrie sphérique), avec

$$\vec{dl} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\vec{u}_\varphi$$

et

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}\vec{u}_r$$

Si la charge est supposée à l'origine, $\vec{r}_1 = \vec{0}$, d'où

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$$

on obtient

$$\vec{dl}\wedge\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\theta & \vec{u}_\varphi \\ dr & r\,d\theta & r\sin\theta\,d\varphi \\ \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\frac{q}{r^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\left[\sin\theta\frac{d\varphi}{r}\vec{u}_\theta - \frac{d\theta}{r}\vec{u}_\varphi\right] = \vec{0}$$

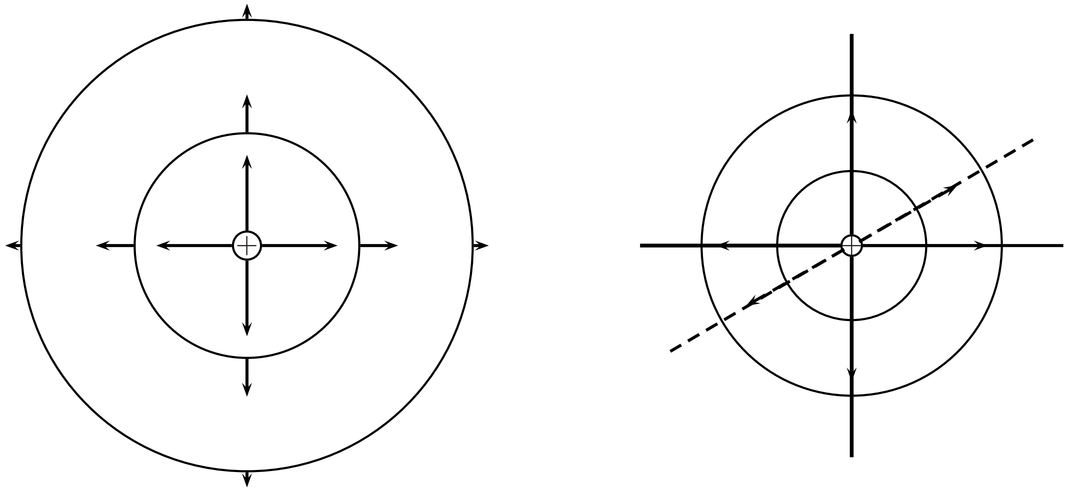

FIGURE 2 – a : variation du champ électrique créé par une charge positif. L'échelle utilisée ne reflète pas la variation en $\frac{1}{r^2}$ du champ électrique, b : représentation de 6 lignes de champ électrique créé par une charge positive

d'où

$$\vec{dl} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\theta & \vec{u}_\varphi \\ dr & r\,d\theta & r\sin\theta\,d\varphi \\ \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\frac{q}{r^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\left[\sin\theta\frac{d\varphi}{r}\vec{u}_\theta - \frac{d\theta}{r}\vec{u}_\varphi\right] = \vec{0}$$

$$\sin\theta\frac{d\varphi}{r} = 0 \quad \text{soit} \quad \varphi = \text{Cste} \quad \text{et} \quad \frac{d\theta}{r} = 0 \quad \text{soit} \quad \theta = \text{Cste}$$

Ceci veut dire qu'une ligne de champ doit suivre, dans ce cas, une trajectoire sur laquelle r change de 0 à ∞ tout en gardant θ et φ constants. Ce sont là des droites radiales (suivant le rayon d'un cercle) orientées (émanant de la charge lorsque celle-ci est positive et convergeant vers la charge lorsque celle-ci est négative)(voir figure 1.b).

3. la représentation de la topographie d'un champ électrique créé par une ou plusieurs charges électriques par des lignes orientées peut prêter à penser que l'information sur l'intensité du champ électrique est perdue, puisqu'on renonce à représenter le champ électrique par des vecteurs qui, par leurs longueurs, indiquent approximativement la norme du champ en tout point. En fait, rien de cela n'est vrai, puisque l'information sur l'intensité du champ électrique est récupérée grâce à une grandeur physique qu'est la densité de lignes par unité de surface. Cette grandeur permet de mesurer l'intensité du champ électrique sur une surface donnée. Pour plus de clarté, prenons l'exemple simple du champ électrique créé par une charge électrique positive, dont les lignes sont

représentées sur la figure 1.b.
Notons tout d'abord qu'il est impossible de représenter toutes les lignes de champ qui émanent de la charge, puisque tout simplement leur nombre est infini ! Pour cela, nous avons choisi de représenter juste six (6) lignes. Sauf que pour être cohérent, il faudra doubler le nombre de lignes (dans notre cas douze (12) lignes) si la quantité de charge était doublée, car l'intensité du champ est linéairement proportionnelle à la quantité de charge.
Remarquons que le nombre de lignes sur chaque surface sphérique de rayon r est le même, c'est à dire 6, alors que la surface augmente en r^2, et plus précisément en $S = 4\pi r^2$. La densité de lignes est donc égale, pour cet exemple, à $\frac{6}{4\pi r^2}$. Ceci est une mesure qui nous permet clairement de voir la variation de l'intensité du champ électrique, puisqu'elle diminue en $\frac{1}{r^2}$ en s'éloignant de la source, comme l'est d'ailleurs la décroissance du champ électrique.

Exercice 05 :(A,B,C)

1. Afin d'établir l'expression du champ électrique créé par deux charges en $(0, 0, a)$ et $(0, 0, -a)$, on doit faire appel à la loi de Coulomb et au principe de superposition. En effet, le champ électrostatique créé en un point M de vecteur position $\vec{r}$ par une charge placée en $(0, 0, a)$ est donné par

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - a\vec{k}|^3}(\vec{r} - a\vec{k})$$

où ϵ_0 la constante diélectrique du vide, $a\vec{k}$ le vecteur position de la première charge q et $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ le vecteur position d'un point quelconque dans l'espace (point M où l'on veut mesurer le champ électrique). De même, le champ électrostatique créé au même point M de vecteur position $\vec{r}$ par une charge placée en $(0, 0, -a)$ est donné par

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} + a\vec{k}|^3}(\vec{r} + a\vec{k})$$

$-a\vec{k}$ étant le vecteur position de la deuxième charge q. Le champ électrique total créé par les deux charges q, selon le principe de superposition, l'expression suivante (voir figure 2) :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\,\epsilon_0}\left(\frac{\vec{r} - a\vec{k}}{|\vec{r} - a\vec{k}|^3} + \frac{\vec{r} + a\vec{k}}{|\vec{r} + a\vec{k}|^3}\right)$$

Remarquons que la direction et l'intensité du champ électrique total dépend de la polarité (positive ou négative), ainsi que de la quantité de charge.

2. dans le plan Oyz le vecteur position $\vec{r}$ a la composante suivant Ox nulle, d'où :

$$\vec{r} = y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

En remplaçant $\vec{r}$ par son expression, on obtient

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\,\epsilon_0}\left(\frac{y\,\vec{j} + (z-a)\vec{k}}{(y^2 + (z-a)^2)^{3/2}} + \frac{y\,\vec{j} + (z+a)\vec{k}}{(y^2 + (z+a)^2)^{3/2}}\right)$$

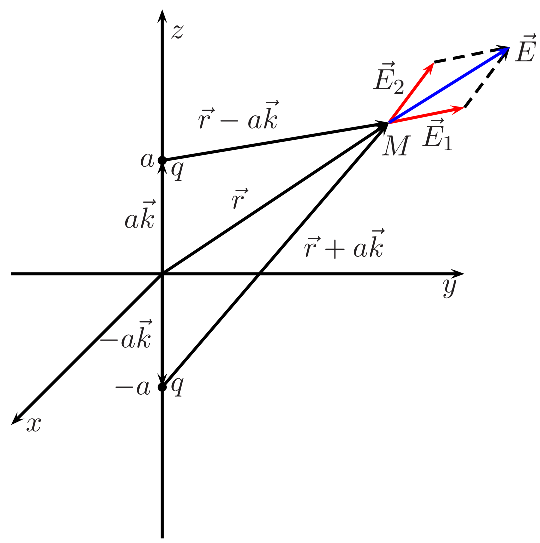

FIGURE 3 – Champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ créé en un point M repéré par le vecteur position $\vec{r}$ par deux charges électriques positives q placées en $(0, 0, a)$ et $(0, 0, -a)$, respectivement.

Ce qui donne un champ électrique dont la composante suivant Ox est aussi nulle.

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x(y,z) = 0 \\ E_y(y,z) = \frac{q}{4\pi\,\epsilon_0}\left(\frac{y}{|y^2+(z-a)^2|^{3/2}} + \frac{y}{|y^2+(z+a)^2|^{3/2}}\right) \\ E_z(y,z) = \frac{q}{4\pi\,\epsilon_0}\left(\frac{(z-a)}{|y^2+(z-a)^2|^{3/2}} + \frac{(z+a)}{|y^2+(z+a)^2|^{3/2}}\right) \end{cases}$$

Ceci est du au fait que le champ électrique à une symétrie un peu particulière. En fait, le champ électrique est dans le plan contenant les deux charges, et sur un cercle dont la génératrice est l'axe des z (le centre du cercle est un point de l'axe des z, tout en étant la normale à la surface délimitée par ce cercle) l'intensité du champ électrique est la même.

3. le champ électrique créé sur l'axe des z par les deux charges a une seule composante, puisque sur cet axe-là la valeur de y est nulle, d'où

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x(z) = 0 \\ E_y(z) = 0 \\ E_z(z) = \frac{q}{4\pi\,\epsilon_0}\left(\frac{z-a}{|z-a|^3} + \frac{z+a}{|z+a|^3}\right) \end{cases}$$

Remarquons que $|z + a|$ et $|z - a|$ sont des quantités positives, qui peuvent être écrites sous les formes suivantes

$$|z+a| = \begin{cases} -(z+a) & z < -a \\ z+a & -a < z < a \\ z+a & a < z \end{cases}$$

et

$$|z-a| = \begin{cases} -(z-a) & z < -a \\ -(z-a) & -a < z < a \\ z-a & a < z \end{cases}$$

En remplaçant dans l'expression de $E_z(z)$, nous obtenons

$$E_z(z) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\,\epsilon_0}\left(-\frac{z-a}{(z-a)^3} - \frac{z+a}{(z+a)^3}\right) & z < -a \\ \frac{q}{4\pi\,\epsilon_0}\left(-\frac{z-a}{(z-a)^3} + \frac{z+a}{(z+a)^3}\right) & -a < z < a \\ \frac{q}{4\pi\,\epsilon_0}\left(\frac{z-a}{(z-a)^3} + \frac{z+a}{(z+a)^3}\right) & a < z \end{cases}$$

ou encore

$$E_z(z) = \begin{cases} -\frac{q}{4\pi\,\epsilon_0}\frac{2(z^2+a^2)}{(z^2-a^2)^2} & z < -a \\ -\frac{q}{4\pi\,\epsilon_0}\frac{4\,a\,z}{(z^2-a^2)^2} & -a < z < a \\ \frac{q}{4\pi\,\epsilon_0}\frac{2(z^2+a^2)}{(z^2-a^2)^2} & a < z \end{cases}$$

Exercice 06 :(A,B,C)

Avant de passer au calcul du champ électrique créé par une distribution linéique de charges électrique sur un cercle de rayon R, nous devons scruter la symétrie du problème posé. En effet, ceci est un cas particulier très simple, puisque en tout point sur l'axe des z, le champ électrique a une seule composante suivant l'axe des z (voir figure 3). Ceci est du au fait que pour chaque élément infinitésimal dl sur le cercle portant une charge $dq = \lambda\, dl$ et créant un champ électrique $d\vec{E}$ au point z le long de la droite reliant le point z à la position de la charge dq on peut trouver un autre élément dl portant la même quantité de charge dq (puisque la distribution est uniforme) et qui soit diamétralement opposé à celui-ci. Ce dernier crée un champ électrique de même intensité mais dont la composante dans le plan Oxy est dans une direction opposée, ce qui, en sommant, annule la composante du champ électrique total dans ce même plan.
La procédure à suivre consiste donc à calculer la composante suivant z du champ électrique créé par un élément du cercle puis faire l'intégration sur tout le cercle, la direction du champ électrique

étant déjà connue.
Rappelons l'expression du champ électrique élémentaire :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{r^2}$$

où r est la distance entre la position de la charge dq sur le cercle et le point z où l'on veut mesurer le champ électrique, et $dl = R\, d\theta$, où θ va de 0 à 2π (afin de balayer le cercle tout entier). Pour calculer la composante suivant z on doit multiplier l'expression du champ électrique par un $\cos\alpha$, où α et l'angle que fait la droite portant r et l'axe des z, d'où

$$dE_z = dE\, \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, R\, d\theta}{r^2}\cos\alpha$$

avec

$$r^2 = R^2 + z^2 \qquad dl = R\, d\theta \qquad \text{et} \qquad \cos\alpha = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}},$$

ce qui donne

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, R\, d\theta}{R^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, z\, R\, d\theta}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

La composante du champ électrique créé en z par la charge totale distribuée sur un cercle st donné donc par :

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, z\, R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\epsilon_0}\frac{\lambda\, z\, R}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\, z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

où $q = \lambda\, 2\pi\, R$ est la charge totale sur le cercle.
Le champ électrique créé en un point z sur l'axe des z par une distribution uniforme sur un cercle de rayon R et d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ est donné par

$$\vec{E}(z) = E_z(z)\vec{k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\, z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}$$

Exercice 07 :(A,B,C)

(a) Afin de profiter de la symétrie du problème, on va choisir l'origine O de la trièdre $Oxyz$ au milieu du segment chargé, choisi colinéaire à l'axe de x. En choisissant deux éléments infinitésimaux dl symétriques par rapport à l'axe des y, les composantes horizontales du champ électrique s'annuleront deux à deux. La seule contribution sera la composante suivant l'axe des y, donnée par

$$dE_y = dE\, \cos\alpha$$

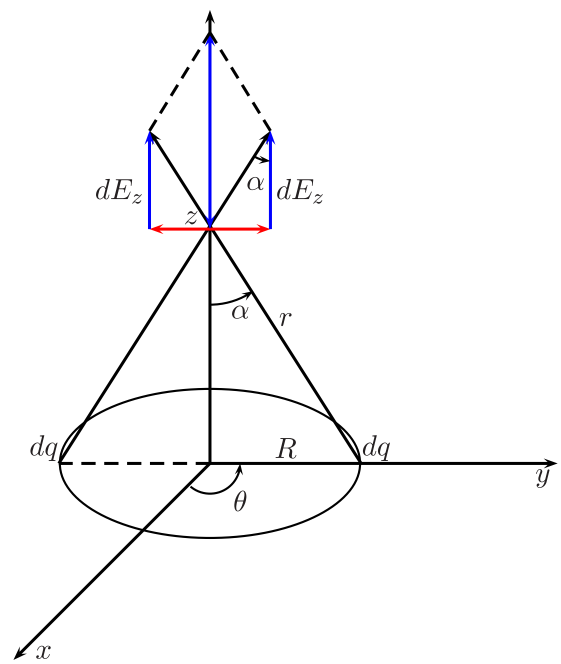

Figure 4 – Champ électrique $\vec{E}(z)$ créé en un point z de l'axe des z par une charge uniformément distribuée sur un cercle de rayon R, de densité linéique λ.

où α est l'angle fait entre la droite portant le vecteur du champ électrique créé en un point y et l'axe des y. La norme du champ élémentaire dE créé par une charge $dq = \lambda\, dl$ sur un élément infinitésimal $dl = dx$ situé en x est égal à :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{x^2+y^2}$$

De la figure on voit bien que

$$\cos\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

d'où

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{y\lambda\, dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Rappelons que l'élément symétrique crée lui aussi un champ électrique en y de même intensité, ce qui nous permet d'écrire le champ total comme

$$E_y(y) = \int_0^L 2\, dE_y = \int_0^L \frac{2}{4\pi\epsilon_0}\frac{y\lambda\, dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

ou encore

$$E_y(y) = \frac{y\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int\limits_0^L \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Pour calculer l'intégrale indéfinie $\int \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, faisons le changement de variable suivant

$$x = y\,tgt \qquad \text{avec} \qquad dx = \frac{y\,dt}{\cos^2 t}$$

L'intégrale ci-dessus devient donc

$$\int \frac{y\,dt}{\cos^2 t}\frac{1}{(y^2+y^2tg^2t)^{3/2}} = \frac{1}{y^2}\int \frac{dt}{\cos^2 t(1+^2 t)^{3/2}}$$

En remplaçant $1+^2 t$ par $\frac{1}{\cos^2 t}$ dans le dénominateur, nous obtenons

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t(1+tg^2t)^{3/2}} = \int \cos t\,dt = \sin t + cste$$

Rappelons que

$$\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-\frac{1}{1+^2 t}} = \sqrt{\frac{tg^2t}{1+tg^2t}} = \sqrt{\frac{(\frac{x}{y})^2}{1+(\frac{x}{y})^2}} = \frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}},$$

d'où

$$\int\limits_0^L \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{y^2}\left[\frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}}\right]_0^L = \frac{L}{y^2\sqrt{y^2+L^2}}$$

Finalement

$$E_y(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda 2\,L}{y\sqrt{y^2+L^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{y\sqrt{y^2+L^2}}$$

et le vecteur du champ électrique

$$\vec{E}(y) = E_y(y)\vec{j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{y\sqrt{y^2+L^2}}\vec{j}$$

(b) lorsque $y \gg L$, on peut réécrire l'expression du champ électrique comme

$$E_y(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{y^2\sqrt{1+(\frac{L}{y})^2}} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{y^2} \qquad \text{car} \qquad \frac{L}{y} \ll 1$$

(c) dans la limite $L \to \infty$, l'expression du champ électrique devient

$$E_y(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\,L\lambda}{y\,L\sqrt{1+(\frac{y}{L})^2}} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\lambda}{y} \qquad \text{car} \qquad \frac{y}{L} \ll 1$$

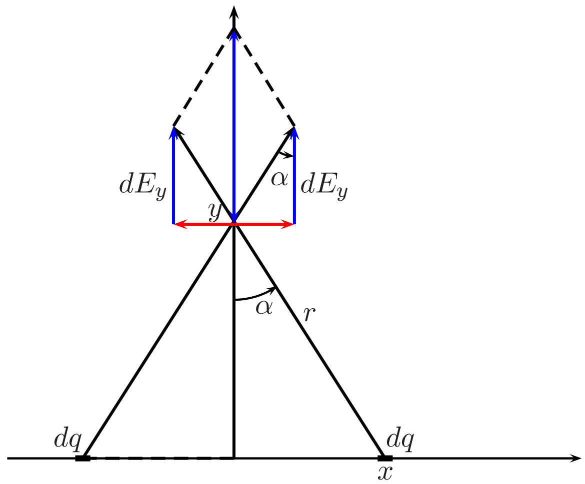

FIGURE 5 – Champ électrique $\vec{E}(y)$ créé en un point y de l'axe des y par une charge uniformément distribuée sur un segment de longueur $2\,L$, de densité linéique λ.

EXERCICE 8 :(A FAIRE PAR LES ÉLÈVES)

Le calcul du champ électrique créé en un point z du centre d'un disque de rayon R (sur la normale) par une charge surfacique σ_0 est suivant l'axe des z, car, par symétrie, on peut toujours trouver deux éléments de surface dS symétriques par rapport à l'origine du disque, contenant la même quantité de charge $dq = \sigma_0\, dS$, et créant, chacune, en z un champ électrique $d^2\vec{E}$ de même intensité, mais dont les composantes dans le plan Oxy s'annulent deux à deux. L'indice 2 dans $d^2\vec{E}$ indique que l'intégration est double.
Calculons donc la composante suivant z champ électrique créé en un point z sur la normale par un élément de surface $dS = dr\, r\, d\theta$ situé à une distance r de l'origine du disque, à savoir :

$$d^2E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma_0\, dr\, r\, d\theta}{(r^2+z^2)^2}\cos\theta$$

où $dq = \sigma_0\, dr\, r\, d\theta$ est la charge contenue sur une surface élémentaire d'un disque $dS = dr\, r\, d\theta$, et

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

d'où

$$d^2E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{z\sigma_0\, r\, d\theta\, dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

Intégrons par rapport à θ

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{z\sigma_0\, r\, dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{z}{2\epsilon_0}\frac{\sigma_0\, r\, dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

Réintégrons maintenant par rapport à r de 0 à R

$$E_z = \frac{z\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

Posons

$$r = z\,t \qquad \text{avec} \qquad dr = t\,dt$$

L'intégrale indéfinie

$$I = \int \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

devient

$$I = \frac{1}{z^3}\int \frac{z^2\,t\,t\,dt}{{}^{3}t} = \frac{1}{z}\int \frac{t\,dt}{{}^{2}t}$$

Posons maintenant

$$u = t \qquad \text{avec} \qquad du = t\,dt$$

d'où

$$I = -\frac{1}{z}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{z}\frac{1}{u}$$

En utilisant la relation

$${}^{2}t -{}^{2}\,t = 1 \qquad \text{ou encore} \qquad t = \sqrt{1 +{}^{2}\,t} = \sqrt{1+\left(\frac{r}{z}\right)^2}$$

nous obtenons donc

$$I = -\frac{1}{z}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{r}{z})^2}} = -\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} + C$$

Le champ électrique est donné par

$$E_z = \frac{\sigma_0\,z}{2\epsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_0^R = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]$$

Finalement

$$\vec{E}(z) = E_z\vec{k} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\vec{k}$$