École Préparatoire en Sciences et Techniques de Tlemcen

Département de Physique

Physique II - Corrigé du TD N° 2

Exercice 01 :(A,B,C)

1. Un pendule électrostatique est composé d'une sphère métallique (ou même une boule recouverte par de l'aluminium) attachée à un fil de masse négligeable. En approchant la tige de la sphère, celle-ci s'attire vers la tige. Il s'agit d'une action à distance entre la tige et la sphère, qui dépend de leur distance mutuelle.
2. En frottant une tige avec du tissu des électrons passent du tissu vers la tige ou le contraire. Ceci est un transfert de charges. Initialement neutres, c'est à dire que le nombre de charges positives est égal au nombre de charges négatives, une substance (tissu ou tige) va perdre des électrons et devient positivement chargée, car elle a reçu un surplus de charges qui va s'accumuler sur sa surface. Les deux corps sont donc électrisés. Dans ce processus, la charge totale est conservée. Il n'y a ni création ni destruction de charges. D'autre part, le sphère est aussi électriquement neutre : elle n'est pas chargée. Toutefois, constituée d'atomes, elle possède des charges négatives et positives en quantités égales. Lorsqu'on approche un corps chargé, les positions des charges sont légèrement modifiées. Par exemple, si on approche une tige en plastique chargée négativement par frottement avec un morceau de tissu pur coton, des charges positives sont attirés tandis que des charges négatives sont repoussées. Les charges positives sont alors plus proches de la règle que les charges négatives. Comme l'intensité de la force électrique décroit avec la distance, l'attraction l'emporte sur la répulsion.
3. On ne peut pas considérer l'ensemble constitué de la tige en plastique et le tissu en coton comme un ensemble isolé, car en frottant, certaines charges vont passer vers notre corps, et de là vers la terre.
4. La tige de verre se charge positivement (elle perd des électrons) par frottement avec de la laine ou de la soie. Cette fois-ci les charges positives de la tige de verre sont plus proches des charges négatives de la sphère et l'attraction l'emporte encore. Dans le cas d'une tige métallique, les électrons qui sont excités par frottement ne se maintiennent pas à la surface du corps, comme le font les électrons des tiges en verre ou en plastique, car dans un métal les électrons excités sont libres à se mouvoir dans tout les corps et ne s'accumulent jamais sur la surface. Ce sont là des conducteurs. Alors que pour les tiges de verre ou en plastique, appelés isolants, les électrons se maintiennent (restent confinés) sur la surface et permettent donc le phénomène d'attraction. La différence entre les deux types de matériaux est dans la mobilité des charges.
5. En rapprochant deux sphères en plastique préalablement frottées par le même tissu de coton, elles se repoussent. Ceci est dû au fait qu'elles sont chargées par le même type de charges (positives ou négatives). Deux charges de même type se repoussent, alors que deux charges de types différents s'attirent.
6. Mis en contact, deux corps frottés se chargent d'électricité de signes contraires. Les électrons des couches externes des atomes étant les charges les moins liées, il y a un transfert d'électrons d'une conifères, et utilisée dans la fabrication d'objets ornementaux. Son nom provient de l'arabe anbar, alors que son appellation grecque élektron est à l'origine du terme électricité), frottée avec de la laine ou du soie se

charge négativement, tandis que, frottée avec un matériau en celluloid (matière plastique utilisée dans la fabrication de manches de couteaux, de touches de piano, de barrettes, de peignes, de billes de billard...) elle se charge positivement.

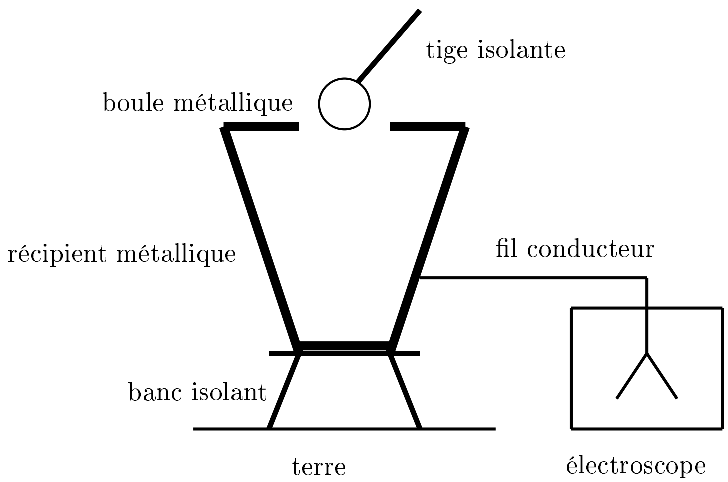
Exercice 02 :(Fait en cours)

1. En frottant une tige en verre avec de la fourrure, celle-là se chargera soit négativement (en recevant un surplus de charges négatives en provenance de la fourrure) soit positivement (en cédant des charges électriques à la fourrure). En mettant la tige en contact avec le plateau conducteur, les charges négatives - par exemple- vont se déplacer (transfert de charges) vers le plateau et de là vers les feuilles conductrices à travers le fil conducteur (les charges électriques dans un conducteur ont une grande mobilité). Les feuilles auront donc un surplus de charges négatives sur leurs surfaces. Les charges négatives sur les feuilles se repoussent donc, créant ainsi une force mécanique qui fait que les feuilles, de par leur légèreté, s'écartent (voir figure ci-dessus).
2. En remplaçant le fil conducteur par un autre fil isolant, il n'y a aucune possibilité pour les charges de passer du plateau vers les feuilles ou l'inverse, car les électrons dans un isolant sont fortement liés aux atomes (mobilité très faible), contrairement à un conducteur où les électrons de valence (couches supérieures) sont libres de se mouvoir dans le matériau.
3. Si on approche une tige en plastique chargée, par exemple, positivement de deux boules métalliques mises en contact entre elles, des charges négatives dans les deux boules (qui constituent un seul système) vont se rapprocher de la tige, car attirées par les charges positives sur la tige, laissant derrière elles des régions qui manquent de charges négatives, donc chargées positivement (phénomène d'induction). Par conséquent, la boule à gauche (la plus proche de la tige) sera chargée négativement, avec un surplus égal de charges.
4. Une fois les boules écartées, on obtient un système avec deux boules : l'une chargée positivement et l'autre chargée négativement en quantité de charges égales. On vient de fabriquer un dipôle électrique (deux charges de polarités différentes).
5. On met en contact la boule métallique à gauche en contact avec le plateau de l'électroscope, les feuilles de l'électroscope vont s'écarter puisque des charges négatives transférées depuis la boule s'y installent. Maintenant, si on met en contact la boule à droite avec l'électroscope dont les feuilles sont déjà chargées négativement, celles-ci reviennent à leurs positions initiales car les charges négatives des feuilles sont attirées par les charges positives de la boule. La force de répulsion n'existe plus entre les deux feuilles de l'électroscope.

Exercice 03 :(A,B,C)

1. Le récipient métallique est mis sur un banc isolant (mobilité faible des charges électriques au sein de l'isolant) afin d'éviter que des charges électriques sur le récipient passent vers la terre ; celle-ci étant un objet (corps) parfaitement conducteur.
2. Une fois la boule métallique positivement chargée est introduite dans le récipient (sans contact), les charges négatives de ce dernier vont être attirées par les charges positives sur la boule (une charge positive est en fait une charge négative qui a déserté sa position !) Elles vont donc s'accumuler sur la surface intérieure du récipient, laissant derrière elles des " endroits" sans charges négatives (donc des charges positives). Puisque l'électroscope est relié par un fil conducteur à la surface externe du récipient des charges négatives des feuilles vont elles aussi être attirées par les charges positives sur la boule, les feuilles de l'électroscope se chargent donc positivement ; ce qui fait qu'elles s'écartent.
3. En mettant en contact la boule chargée positivement (manque de charges négatives) et la surface externe du récipient, sur laquelle sont accumulées des charges négatives, celles-ci vont passer vers la boule pour combler le manque de charges sur la boule. Les charges positives sur la face externe du récipient restent sur leurs positions, et les feuilles de l'électroscope restent écartées.

4. Après avoir mis en contact la boule chargée positivement au récipient, les charges négatives " arrachées" au récipient vont " s'installer" sur la boule, et celle-ci devient de nouveau neutre. En mettant donc cette boule en contact avec un autre électroscope, les feuilles de celui-ci ne s'écartent pas, car ne recevant pas de charges de la boule.
5. En retirant la boule du récipient, les charges positives sont toujours sur la surface extérieure du récipient. Les feuilles restent donc écartées. On vient de charger positivement le récipient par contact avec une boule métallique chargée positivement.
6. En rechargeant positivement la boule puis en l'introduisant de nouveau dans le récipient (sans contact), les charges négatives du récipient, mais aussi celles sur les feuilles de l'électroscope vont être attirées vers la boule (sur la surface externe du récipient). La quantité de charges positives sur les feuilles augmente, entrainant ainsi une augmentation de la force électrostatique entre les deux charges positives sur les deux feuilles. Celles-ci s'écartent davantage. C'était-là l'idée de base des premiers moteurs électrostatique, remplacés depuis par les piles de volta.



Exercice 04 :(A,B,C)

Si un objet possède une charge électrique totale nulle, il serai utile de définir une grandeur physique qui décrit la disposition ds charges dans l'espace (c'est l'idée même du moment d'inertie d'un corps rigide). On définit donc le dipôle électrostatique d'une distribution de charges dans l'espace, représenté mathématiquement par son moment dipolaire. Ce dernier, noté par $\vec{p}$, est donné par la formule :

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

q_i étant la charge à la position $\vec{r}_i$, défini par rapport à une origine de coordonnées. Le moment dipolaire joue un rôle important en électromagnétisme car il permet souvent de décrire le comportement, à grande distance, d'une distribution quelconque de charges.

1. Les vecteurs positions des charges par rapport au centre O d'un carré de côté $2a$ sont donnés par :

$$\vec{r}_1 = a\vec{i} + a\vec{j}, \vec{r}_2 = a\vec{i} - a\vec{j}, \vec{r}_3 = -a\vec{i} - a\vec{j}, \vec{r}_4 = -a\vec{i} + a\vec{j}$$

avec

$$\vec{p} = q_1\vec{r}_1 + q_2\vec{r}_2 + q_3\vec{r}_3 + q_4\vec{r}_4 = -4qa\vec{i} = -4\times 10^{-18}\,C.m\vec{i}$$

2. Le barycentre est une notion permettant de déterminer une position (ou même une valeur) qui peut remplacer à elle seule une répartition dans l'espace (géométrique ou de valeurs) de masses, de charges ou de valeurs. En physique le barycentre est lui-même le centre de masse. On empreinte cette notion pour calculer le centre de charge d'un ensemble de charges réparties dans l'espace. Ce dernier est défini par :

$$\overrightarrow{OB} = \frac{\sum_i q_i\vec{r}_i}{\sum_i q_i} = \frac{\vec{p}}{Q}$$

Q étant la somme algébrique des charges, égale, dans ce cas, à $Q = 1\times 10^{-8}\,C$. La position du barycentre est donnée par le vecteur- position :

$$\overrightarrow{OB} = -4\times 10^{-10}\,m\vec{i}$$

3. Si les charges avaient les mêmes valeurs, le moment dipolaire aura une valeur nulle. On peut raisonner en utilisant la symétrie du problème. Puisque les charges sont les mêmes, on peut les sortir de la somme. On doit donc calculer la résultante des 4 vecteurs. En effet, la résultante des deux vecteurs $\vec{r}_1 = a\vec{i} + a\vec{j}$ et $\vec{r}_2 = a\vec{i} - a\vec{j}$ est suivant $\vec{i}$ avec un module égal à $2a$, alors que la résultante des vecteurs $\vec{r}_3 = -a\vec{i} - a\vec{j}$ et $\vec{r}_4 = -a\vec{i} + a\vec{j}$ est suivant $-\vec{i}$ avec un module égal à $2a$. La résultante est donc nulle, ce qui donne un moment dipolaire nul. par conséquent, le barycentre du système de charges est en O.

4. Dans le cas d'une distribution continue, le moment dipolaire est donné par :

$$\vec{p} = \int \lambda(\vec{r})\vec{r}d\ell \qquad \text{pour une distribution linéique,}$$

$$\vec{p} = \int \sigma(\vec{r})\vec{r}dS \qquad \text{pour une distribution surfacique}$$

et

$$\vec{p} = \int \rho(\vec{r})\vec{r}dV \qquad \text{pour une distribution volumique}$$

Dans notre cas, la charge est distribuée sur un arc d'un cercle d'angle 2α, d'où :

$$\vec{p} = \int \lambda(\vec{r})\vec{r}d\ell$$

$d\ell$ étant un élément infinitésimal de l'arc égal à $d\ell = Rd\theta$, avec θ allant de $-\alpha$ vers α, R le rayon du cercle auquel appartient l'arc, $\lambda(\vec{r})$ la distribution linéique de la charge sur la charge et $\vec{r}$ le vecteur position d'une charge infinitésimale sur l'arc $dq = \lambda(\vec{r})d\ell$. On obtient donc

$$\vec{p} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \lambda(\vec{r})\vec{r}Rd\theta$$

Puisque la distribution des charges sur l'arc est uniforme, on peut écrire $\lambda(\vec{r}) = \lambda_0$. En remplaçant dans l'intégrale ci-dessus, on trouve

$$\vec{p} = \lambda_0 \int_{-\alpha}^{\alpha} \vec{r}Rd\theta$$

Définissons tout d'abord la direction du vecteur $\vec{p}$. En effet, en utilisant la symétrie du problème, et en se basant sur l'argument fait il est évident que le vecteur $\vec{p}$ est dirigé du centre du cercle O vers le centre de l'arc ($\alpha = 0$), pris suivant le vecteur unité $\vec{j}$. En calculant l'intégrale, on ne fait que sommer les composantes suivant l'axe des y, données par $y = R\cos\theta$, des vecteurs position des charges infinitésimales sur l'arc. L'intégrale devient donc :

$$\vec{p} = \left[\lambda_0 \int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\theta R d\theta\right]\vec{j} = \left[R^2\lambda_0 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta d\theta\right]\vec{j} = 2R^2\lambda_0 \sin\alpha\vec{j}$$

Dans le cas d'un demi cercle, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, d'où :

$$\vec{p} = 2R^2\lambda_0\vec{j}$$

5. Le barycentre de cette distribution est repéré par le vecteur

$$\overrightarrow{OB} = \frac{\vec{p}}{Q} = \frac{2R^2\lambda_0\vec{j}}{\pi R\lambda_0} = \frac{2R}{\pi}\vec{j}$$

Exercice 05 :(Fait en cours)

Un segment porte une charge non uniforme dont la charge linéique varie spatialement selon :

$$\lambda(x) = \lambda_0\left[1 - \cos\left(\pi\frac{x}{a}\right)\right] \qquad \text{pour} \qquad -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$$

La charge totale sur la partie du fil est donnée par :

$$Q = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \lambda(x)dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \lambda_0\left[1 - \cos\left(\pi\frac{x}{a}\right)\right]dx = \lambda_0\left[x - \frac{a}{\pi}\sin\left(\pi\frac{x}{a}\right)\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \lambda_0(a - 2\frac{a}{\pi}$$

Exercice 06 :(A,B,C)

1. En coordonnées polaires, la surface élémentaire s'écrit comme :

$$dS = rdrd\theta$$

La charge totale sur le disque est donnée par :

$$Q = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sigma(\vec{r})dS = \frac{\sigma_0}{R^2}\int_0^R r^3dr\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{2}\sigma_0 R^2$$

2. En coordonnées cartésiennes, la charge totale sur le disque est donnée par :

$$Q = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sigma(\vec{r})dS = \frac{\sigma_0}{R^2}\int_{-R}^{R}\left[\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2+y^2)\right]dx$$

où on a pris le centre du disque comme origine du système d'axes en coordonnées cartésiennes. Calculons l'intégrale

$$\frac{\sigma_0}{R^2}\int_{-R}^{R}\left[\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}(x^2+y^2)\right]dx=\left[(x^2y+\frac{1}{3}y^3)\right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}=2x^2(\sqrt{R^2-x^2})+\frac{2}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

L'expression de la charge devient

$$Q=\frac{\sigma_0}{R^2}\int_{-R}^{R}\left[2x^2(\sqrt{R^2-x^2})+\frac{2}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]dx$$

ou encore

$$Q=\frac{\sigma_0}{R^2}\left[2\int_{-R}^{R}2x^2(\sqrt{R^2-x^2})dx+\frac{2}{3}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]dx$$

Posons

$$I=\int_{-R}^{R}2x^2(\sqrt{R^2-x^2})dx \qquad \text{et} \qquad II=\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

Ce qui permet d'écrire

$$Q=\frac{\sigma_0}{R^2}\left[2I+\frac{2}{3}II\right]$$

Pour calculer l'intégrale I, on doit faire le changement de variable

$$\frac{x}{R}=\sin t \qquad \text{avec} \qquad dx=R\cos t\,dt$$

ce qui mène à écrire

$$I=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(R^2\sin^2 t)^2R\left(1-(\frac{x}{R})^2\right)^{\frac{1}{2}}R\cos tdt=R^4\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t(1-\sin^2 t)^{\frac{1}{2}}\cos tdt=R^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 tdt$$

Ce qui peut s'écrire encore sous la forme

$$I=R^4\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cos 2t)}{2}\frac{(1+\cos 2t)}{2}dt=\frac{R^4}{4}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 2t)dt$$

ou encore

$$I=\frac{R^4}{4}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{2-1-\cos 4t}{2})dt=\frac{R^4}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt$$

Ce qui donne

$$I=\frac{R^4}{8}\left[t-\frac{1}{4}\sin 4t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi R^4}{8}$$

Calculons maintenant l'intégrale

$$II = \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

Pour cela on doit faire le changement de variable suivant :

$$\frac{x}{R} = \sin t \qquad \text{avec} \qquad dx = R\cos t\, dt$$

d'où

$$II = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^3 \left(1 - (\frac{x}{R})^2\right)^{\frac{3}{2}} R\cos tdt = R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)^{\frac{3}{2}} \cos tdt = R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 tdt$$

Après calcul, on obtient

$$II = \frac{3\pi R^4}{8}$$

ce qui donne

$$Q = \frac{\sigma_0}{R^2}\left[2\frac{\pi R^4}{8} + \frac{2}{3}\frac{3\pi R^4}{8}\right] = \frac{\sigma_0 \pi R^2}{2}$$

Exercice 07 :(A,B,C)

1. La surface infinitésimale d'une sphère de rayon R est donnée par :

$$dS_R = Rd\theta R\sin\theta d\varphi$$

avec, dans ce cas, θ allant de 0 à α et φ de 0 à 2π. La charge de la calotte sphérique s'obtient donc intégrant sur la surface :

$$Q = \iint \sigma(\vec{r})dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sigma_0 \cos\theta R^2 \sin\theta d\theta = 2^2\sigma_0 \int_0^{\alpha} \sin\theta d(\sin\theta)$$

ce qui donne

$$Q = 2^2\sigma_0 \sin^2\alpha$$

2. La charge d'une sphère est donc égale à

$$Q = 2^2\sigma_0 \sin^2\frac{\pi}{2} = 2^2\sigma_0$$

3. La charge surfacique moyenne d'une demi-sphère est donc égale à

$$\sigma_m = \frac{Q}{2\pi R^2} = \frac{2^2\sigma_0}{2\pi R^2} = \frac{\sigma_0}{2}$$

4. Le moment dipolaire, par rapport à l'origine, d'une distribution surfacique est donné par :

$$\vec{p} = \int \sigma(\vec{r})\vec{r}dS$$

La symétrie du problème fait que le vecteur $\vec{p}$ soit dirigé du centre de la sphère génératrice de la demi-sphère vers un point sur la surface représentée par $\theta = 0$, c'est à dire suivant l'axe des z (à savoir $\vec{k}$) ;suivant

$\vec{k}$ est $R\cos\theta$, la base de la demi-sphère étant dans le plan Oxy. La composante du vecteur $\vec{r}$ de charges est donné par :d'où :

$$\vec{p} = R^3\sigma_0 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\right]\vec{k} = -2\pi R^3\sigma_0 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d(\cos\theta)\right]\vec{k} = 2\pi R^3\sigma_0\vec{k}$$

5. Le barycentre de cette charge est donné par :

$$\overrightarrow{OB} = \frac{\vec{p}}{Q} = \frac{2\pi R^3\sigma_0\vec{k}}{2\pi R^2\sigma_0} = \frac{R}{3}\vec{k}$$

Exercice 08 :(Fait en cours)

1. Comme les nucléons sont uniformément répartis, on a

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = A\,v_n$$

où v_n désigne le volume d'un nucléon. Il en résulte que

$$R = \left(\frac{3v_n}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \times A^{\frac{1}{3}} = R_0 A^{\frac{1}{3}}$$

R_0 étant le rayon d'un nucléon.

2. la charge volumique ρ s'obtient alors aisément :

$$\rho = \frac{Z\,e}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Z\,e}{4ßR_0A} = 1.33 \times 10^{25} C.m^{-3}$$

puisque $Z = 6$, $A = 12$ et $R_0 = 1.2fm$ (fm :femtomètre $= 10^{-15}m$)