École Préparatoire en Sciences et Techniques de Tlemcen

Département de Physique

Physique II - TD N° 1

Exercice 01 :

1. calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$$

L'objectif de cet exercice est de montrer qu'en passant d'un système de coordonnées, en l'occurrence le système de coordonnées cartésiennes vers le système de coordonnées polaires, il est possible de calculer facilement cette intégrale gaussienne. En effet, l'astuce est de calculer I^2, c'est à dire

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

Ceci est une intégrale de la fonction $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ sur la surface infinie qu'est le plan xOy. L'élément infinitésimal de cette surface dans le système de coordonnées cartésiennes est $dS = dx\, dy$. On peut balayer cette même surface infinie en utilisant les coordonnées polaires (ρ, θ), où ρ varie entre 0 et $+\infty$ alors que θ varie entre 0 et 2π. L'élément de surface infinitésimal est égal à $dS = \rho\, d\rho\, d\theta$ et $x^2+y^2 = \rho^2$. Ce qui nous permet de réécrire l'intégrale I^2 sous la forme :

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho^2}\, \rho\, d\rho = 2\pi \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho^2}\, \rho\, d\rho$$

En faisant le changement de variable suivant $u = \rho^2$ avec $du = 2\rho d\rho$; ou encore $\rho d\rho = \dfrac{du}{2}$, nous obtenons

$$I^2 = \pi \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u}\, du = \pi \left[-\mathrm{e}^{-u}\right]_0^{\infty} = \pi$$

Ce qui enfin donne

$$I = \sqrt{\pi}$$

Exercice 02 :

Vérifier l'égalité suivante dans le système de coordonnées cartésiennes :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

Prenons les vecteurs :

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

,

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

et

$$\vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k}$$

Le calcul des produits scalaires nous donne :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

et

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = A_xC_x + A_yC_y + A_yC_y$$

Ce qui nous amène à écrire

$$\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) = (A_xB_xC_x+A_yB_xC_y+A_yB_xC_y)\vec{i}+(A_xB_yC_x+A_yB_yC_y+A_yB_yC_y)\vec{j}+(A_xB_zC_x+A_yB_zC_y+A_yB_zC_y)\vec{k}$$

et

$$\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (A_xB_xC_x+A_yB_yC_x+A_zB_zC_x)\vec{i}+(A_xB_xC_y+A_yB_yC_y+A_zB_zC_y)\vec{j}+(A_xB_xC_z+A_yB_yC_z+A_zB_zC_z)\vec{k}$$

D'autre part, on calcule le produit vectoriel

$$\vec{B} \wedge \vec{C} = (B_yC_z - B_zC_y)\vec{i} + (B_zC_x - B_xC_z)\vec{j} + (B_xC_y - B_yC_x)\vec{k}$$

et

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = (A_yB_xC_y-A_yB_yC_x-A_yB_zC_x+A_yB_xC_z)\vec{i}-(A_xB_xC_y-A_xB_yC_x-A_zB_yC_z+A_zB_zC_y)\vec{j}+(A_xB_zC_x-A_xB_xC$$

La comparaison entre les deux expressions nous permet de vérifier qu'elles sont bien identiques.

Exercice 03 :

On donne les vecteurs unités dans le système de coordonnées cylindriques comme :

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \\ \vec{u}_z = \vec{k} \end{cases}$$

Calculons les produits scalaires suivants :

$$\vec{i}\cdot\vec{u}_\rho = \cos\theta, \quad \vec{i}\cdot\vec{u}_\theta = -\sin\theta, \quad \text{et} \quad \vec{i}\cdot\vec{u}_z = 0$$

$$\vec{j}\cdot\vec{u}_\rho = \sin\theta, \quad \vec{j}\cdot\vec{u}_\theta = \cos\theta, \quad \text{et} \quad \vec{j}\cdot\vec{u}_z = 0$$

$$\vec{k}\cdot\vec{u}_\rho = 0, \quad \vec{k}\cdot\vec{u}_\theta = 0, \quad \text{et} \quad \vec{k}\cdot\vec{u}_z = 1$$

Mais on sait que

$$\vec{i} = (\vec{i}\cdot\vec{u}_\rho)\vec{u}_\rho + (\vec{i}\cdot\vec{u}_\theta)\vec{u}_\theta + (\vec{i}\cdot\vec{u}_z)\vec{u}_z$$

ce qui donne

$$\vec{i} = \cos\theta\vec{u}_\rho - \sin\theta\vec{u}_\theta$$

et

$$\vec{j} = (\vec{i}\cdot\vec{u}_\rho)\vec{u}_\rho + (\vec{j}\cdot\vec{u}_\theta)\vec{u}_\theta + (\vec{j}\cdot\vec{u}_z)\vec{u}_z$$

ce qui donne

$$\vec{j} = \sin\theta\vec{u}_\rho + \cos\theta\vec{u}_\theta$$

et

$$\vec{k} = (\vec{k}\cdot\vec{u}_\rho)\vec{u}_\rho + (\vec{k}\cdot\vec{u}_\theta)\vec{u}_\theta + (\vec{k}\cdot\vec{u}_z)\vec{u}_z$$

ce qui donne

$$\vec{k} = \vec{u}_z$$

Exercice 04 :

1. Calcul de la surface latérale d'un cylindre de hauteur L et de rayon R, en utilisant le système de coordonnées cylindriques :
   l'élément infinitésimal de la surface latérale d'un cylindre de rayon R est égal à
   $$dS_r = (R\,d\theta)\cdot dz$$
   d'où la surface latérale d'un cylindre de hauteur L et de rayon R est égale à
   $$S = \int_0^L dz \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R\,L$$
2. Calcul de la surface latérale d'un cylindre de hauteur L et de rayon R, en utilisant le système de coordonnées cartésiennes :
   l'élément infinitésimal de la surface latérale d'un cylindre de rayon R est égal à
   $$dS_L = ds\cdot dz$$
   avec
   $$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

et

$$x^2 + y^2 = R^2$$

ce qui donne

$$2\,x\,dx + 2\,y\,dy = 0$$

ou encore

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

en remplaçant ceci dans l'expression de ds, on obtient

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = dx\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = dx\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} = R\frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

la symétrie du cylindre par rapport à l'axe des z nous permet de calculer la moitié de sa surface, ensuite la multiplier par deux pour avoir l'expression de la surface entière, d'où

$$\frac{1}{2}S = \int_0^L dz \int_{-R}^{R} R\frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = L\int_{-R}^{R} \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}}$$

Faisons le changement de variable suivant :

$$\sin(t) = \frac{x}{R}$$

ce qui donne

$$d\sin(t) = \cos(t)dt = \frac{dx}{R}$$

ou encore

$$dx = R\cos(t)dt$$

et l'intégrale ci-dessus devient

$$S = 2\,L\,R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = 2\pi L\,R$$

3. il est donc préférable de travailler dans le système de coordonnées cylindriques quand il s'agit d'un système de symétrie cylindrique, ou qui a carrément la forme d'un cylindre.

Exercice 05 :

Dans le système de coordonnées cylindriques, le vecteur position du point $A(0,0,h)$ sur l'axe des z est donné par :

$$\overrightarrow{OA} = h\vec{u}_z$$

alors que le vecteur position du point $B(\rho, \theta, 0)$ est donné par :

$$\overrightarrow{OB} = \rho \vec{u}_\rho$$

On obtient donc

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -h\vec{u}_z + \rho\vec{u}_\rho$$

Le vecteur unité porté par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donné par :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{-h\vec{u}_z + \rho\vec{u}_\rho}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}$$

Exercice 06 :

Exprimer en coordonnées cylindriques le vecteur $\vec{A}$, donné en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{A} = y\vec{i} + x\vec{j} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{k}$$

Les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

Leurs variations infinitésimales s'écrivent donc

$$\begin{cases} dx = \cos(\theta)d\rho - \rho\sin(\theta)d\theta \\ dx = \sin(\theta)d\rho + \rho\cos(\theta)d\theta \\ dz = dz \end{cases}$$

Un déplacement infinitésimal s'écrit comme

$$d\vec{\ell} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

qui, après réarrangement, aura la forme

$$d\vec{\ell} = \left(\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}\right)d\rho + \left(-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}\right)\rho d\theta + \vec{k}dz$$

ceci nous permet d'écrire le déplacement infinitésimal $d\vec{\ell}$ dans le système de coordonnées cylindriques sous la forme :

$$d\vec{\ell} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{k}$$

par identification, les vecteurs unitaires orthogonaux formant le trièdre direct s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \\ \vec{u}_z = \vec{k} \end{cases}$$

Rappelons que

$$\begin{cases} \vec{i} = \left(\vec{i}\cdot\vec{u}_\rho\right)\vec{u}_\rho + \left(\vec{i}\cdot\vec{u}_\theta\right)\vec{u}_\theta + \left(\vec{i}\cdot\vec{u}_z\right)\vec{u}_z = \cos(\theta)\vec{u}_\rho - \sin(\theta)\vec{u}_\theta \\ \vec{j} = \left(\vec{j}\cdot\vec{u}_\rho\right)\vec{u}_\rho + \left(\vec{j}\cdot\vec{u}_\theta\right)\vec{u}_\theta + \left(\vec{j}\cdot\vec{u}_z\right)\vec{u}_z = \sin(\theta)\vec{u}_\rho + \cos(\theta)\vec{u}_\theta \\ \vec{k} = \left(\vec{k}\cdot\vec{u}_\rho\right)\vec{u}_\rho + \left(\vec{k}\cdot\vec{u}_\theta\right)\vec{u}_\theta + \left(\vec{k}\cdot\vec{u}_z\right)\vec{u}_z = \vec{u}_z \end{cases}$$

Notons que

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

et en remplaçant dans l'expression du vecteur $\vec{A}$, nous obtenons

$$\vec{A} = \rho\sin(\theta)\left[\cos(\theta)\vec{u}_\rho - \sin(\theta)\vec{u}_\theta\right] + \rho\cos(\theta)\left[\sin(\theta)\vec{u}_\rho + \cos(\theta)\vec{u}_\theta\right] + \rho\cos^2(\theta)\vec{u}_z$$

ou encore

$$\vec{A} = \left[\rho\sin(\theta)\cos(\theta) + \rho\cos(\theta)\sin(\theta)\right]\vec{u}_\rho + \left[-\rho\sin(\theta)\sin(\theta) + \rho\cos(\theta)\cos(\theta)\right]\vec{u}_\theta + \rho\left[\cos^2(\theta)\right]\vec{u}_z$$

après réarrangement, on obtient

$$\vec{A} = 2\rho\sin(\theta)\cos(\theta)\vec{u}_\rho + \rho\left[\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right]\vec{u}_\theta + \rho\cos^2(\theta)\vec{u}_z$$

Exercice 07 :

1. Exprimer les coordonnées sphériques r, θ et φ en fonction des coordonnées cartésiennes x, y et z.
   Un point M dans l'espace est repéré dans le système de coordonnées sphériques par trois coordonnées :
   (a) le rayon r qui est la droite reliant le point M à l'origine O et qui varie entre 0 et ∞
   (b) la latitude θ qui est l'angle que fait le rayon r (droite OM) avec l'axe de z et variant entre 0 et π
   (c) la longitude φ qui est l'angle que fait la droite résultant de la projection du rayon r sur le plan xOy et l'axe des x, et qui varie entre 0 et 2π. Ceci est la convention des physiciens.

Les vecteurs unitaires composant le trièdre en coordonnées sphériques sont

(a) $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire dans la direction de la variation du rayon r.

(b) $\vec{u}_\theta$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à r dans la direction de la variation de l'angle θ.

(c) $\vec{u}_\varphi$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à la droite résultant de la projection de r sur le plan xOy dans la direction de la variation de l'angle φ.

Ces trois vecteurs sont orthogonaux les uns aux autres selon les formules suivantes

$$\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi, \qquad \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r = \vec{u}_\theta \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\varphi = \vec{u}_r$$

Le vecteur position d'un point est donné par $\vec{OM} = r\vec{u}_r$

En projetant ce vecteur sur l'axe des z, nous obtenons $z = r\cos(\theta)$.

En projetant ce vecteur sur le plan xOy, nous obtenons $r\sin(\theta)$, ensuite en projetant cette droite sur l'axe des x, nous obtenons $x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$, et en projetant la même droite sur l'axe des y nous obtenons $y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$

2. Retrouver l'expression du carré de l'élément différentiel $d\ell^2$ dans ce système de coordonnées.

Dans le système de coordonnées cartésiennes, l'élément différentiel (vecteur de déplacement infinitésimal) s'écrit sous la forme :

$$\vec{d\ell} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

avec

$$\begin{cases} dx = \sin(\theta)\cos(\varphi)dr + r\cos(\theta)\cos(\varphi)d\theta - r\sin(\theta)\sin(\varphi)d\varphi \\ \\ dy = \sin(\theta)\sin(\varphi)dr + r\cos(\theta)\sin(\varphi)d\theta + r\sin(\theta)\cos(\varphi)d\varphi \\ \\ dz = \cos(\theta)dr - r\sin(\theta)d\theta \end{cases}$$

et

$$(d\ell)^2 = \vec{d\ell}\cdot\vec{d\ell} = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

Après un calcul long mais direct, nous obtenons :

$$(d\ell)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2(\theta)(d\varphi)^2$$

3. Retrouver les expressions des vecteurs unitaires en coordonnées sphériques :

En utilisant les expressions des variations des coordonnées cartésiennes établies ci-dessus, nous pouvons écrire

$$\vec{d\ell} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = [\sin(\theta)\cos(\varphi)dr + r\cos(\theta)\cos(\varphi)d\theta - r\sin(\theta)\sin(\varphi)d\varphi]\,\vec{i} +$$

$$[\sin(\theta)\sin(\varphi)dr + r\cos(\theta)\sin(\varphi)d\theta + r\sin(\theta)\cos(\varphi)d\varphi]\,\vec{j} + [\cos(\theta)dr - r\sin(\theta)d\theta]\,\vec{k}$$

ce qui, après réarrangement, donne

$$\vec{d\ell} = \left[\sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} + \cos(\theta)\vec{k}\right] dr +$$

$$\left[\cos(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} - \sin(\theta)\vec{k}\right] r d\theta + \left[-\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j}\right] r\sin(\theta)d\varphi$$

de l'expression de $(d\vec{\ell})^2$ établie ci-dessus, on déduit que

$$d\vec{\ell} = dr\vec{u}_r + r\,d\theta\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)d\varphi\vec{u}_\varphi$$

par identification, on trouve les expressions des trois vecteurs unitaires

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\vec{j} - \sin\theta\vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} \end{cases}$$

On peut vérifier que ces trois vecteurs sont unitaires (de module unité) en calculant leurs modules respectifs.
D'autre part, la différentielle totale du vecteur position est donnée par

$$d\vec{\ell} = \frac{\partial\vec{\ell}}{\partial r}dr + \frac{\partial\vec{\ell}}{\partial r}d\theta + \frac{\partial\vec{\ell}}{\partial\varphi}d\varphi$$

Par identification, on obtient les expressions suivantes

$$\vec{u}_r = \frac{\partial\vec{\ell}}{\partial r}, \qquad \vec{u}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\vec{\ell}}{\partial\theta} \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_\varphi = \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial\vec{\ell}}{\partial\varphi}$$

4. Faire les dérivées par rapport au temps des vecteurs unitaires.

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot\theta\cos(\theta)\cos\varphi\vec{i} - \dot\varphi\sin(\theta)\sin\varphi\vec{i} + \dot\theta\cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} + \dot\varphi\sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{j} - \dot\theta\sin\theta\vec{k}$$

ou encore

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot\theta\vec{u}_\theta + \dot\varphi\sin(\theta)\vec{u}_\varphi$$

De la même manière, on peut vérifier que

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot\theta\vec{u}_r + \dot\varphi\cos(\theta)\vec{u}_\varphi$$

et

$$\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = -\dot\varphi\left[\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j}\right]$$

5. Utiliser les coordonnées sphériques pour trouver la surface d'une aire découpée sur une sphère de rayon R et définie par $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ et $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$.
L'élément différentiel de surface pour un rayon r constant est donné par :

$$dS_r = (rd\theta)\cdot(r\,\sin(\theta)d\varphi)$$

On peut se convaincre de la véracité de l'expression, en remarquant que

$$d\vec{\ell} = dr\vec{u}_r + r\,d\theta\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)d\varphi\vec{u}_\varphi$$

et que sur une surface où le rayon est constant, la variation se fait exclusivement suivant les directions $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$. Pour un rayon $r = R$, la surface d'une aire découpée sur une sphère de rayon R et définie par $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ et $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ est égale à

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} R^2 \sin(\theta) d\theta$$

ou encore

$$S = R^2 (\varphi_2 - \varphi_1) (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))$$

Dans le cas où $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \pi$, $\varphi_1 = 0$ et $\varphi_2 = 2\pi$, on aura

$$S = 4\pi R^2$$

6. Établir l'expression donnant le volume d'une sphère de rayon R à partir du volume différentiel.

$$V = \int_0^R r^2 \, dr \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Exercice 08 :

Soit le champ : $\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{x}\vec{i} + \frac{1}{y}\vec{j} + \frac{1}{z}\vec{k}$

Par définition, le gradient d'un scalaire dans le système de coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\vec{\text{grad}} V = \vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

alors que le déplacement infinitésimal est donné par :

$$d\vec{\ell} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

et la différentielle totale de V est donnée par :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Remarquons que

$$\vec{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right) = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = dV$$

Par hypothèse

$$\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\nabla} V$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $d\vec{\ell}$,

$$\vec{E}(x, y, z) \cdot d\vec{\ell} = -\vec{\nabla} V \cdot d\vec{\ell} = -dV$$

L'intégrale par rapport à $d\vec{\ell}$ donne :

$$\int dV = -\int \vec{E}(x,y,z)\cdot d\vec{\ell} = -\int \left(\frac{1}{x}\vec{i} + \frac{1}{y}\vec{j} + \frac{1}{z}\vec{k}\right)\cdot d\vec{\ell}$$

ce qui donne

$$V = -\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dz}{z}$$

ou encore

$$V = -\ln|x| - \ln|y| - \ln|z| + \text{cste} = -\ln|x\,y\,z| + \text{cste}$$

La constante est définie par les conditions aux limites du problème traité.

Exercice 09 :

Un point $M(x,y,z)$ étant repéré par le rayon vecteur $\vec{r} = O\vec{M}$, de module $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(a) calcul de $\vec{\nabla} r$

$$\vec{\nabla} r = \frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}$$

Calculons les composantes de ce vecteur :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

ce qui donne

$$\vec{\nabla} r = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{u}_r$$

(b) calcul de $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$

$$\vec{\nabla} r = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\vec{k}$$

Calculons les composantes de ce vecteur :

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \qquad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} = -\frac{y}{r^3} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$$

ce qui donne

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x}{r^3}\vec{i} - \frac{y}{r^3}\vec{j} - \frac{z}{r^3}\vec{k} = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

(c) calcul de $\vec{\nabla}\ln r$

$$\vec{\nabla}\ln r = \frac{\partial \ln r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \ln r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \ln r}{\partial z}\vec{k}$$

Calculons les composantes de ce vecteur :

$$\frac{\partial \ln r}{\partial x} = \frac{x}{r^2}, \qquad \frac{\partial \ln r}{\partial y} = \frac{y}{r^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \ln r}{\partial z} = \frac{z}{r^2}$$

ce qui donne

$$\vec{\nabla} \ln r = \frac{x}{r^2}\vec{i} + \frac{y}{r^2}\vec{j} + \frac{z}{r^2}\vec{k} = \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{\vec{u}_r}{r}$$

1. l'application de l'opérateur ∇ à une fonction scalaire donne un vecteur (gradient de cette fonction) dirigé dans la direction de la variation maximale de cette même fonction dans l'espace. Son module donne le taux de variation de cette fonction dans cette direction. Le vecteur gradient de la fonction est perpendiculaire à la direction de variation nulle. On peut vérifier ça sur le cas du $\vec{\nabla} r$.
2. tracer les allures des champs résultant. Commenter.

Exercice 10 :

En explicitant la relation

$$dU = \vec{\nabla}\, U \cdot \vec{dl}$$

donner l'expression du gradient :

1. en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) : la variation infinitésimale d'une fonction U dépendant des coordonnés cylindriques est donnée par (différentielle totale) :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial U}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

mais on sait aussi que

$$dU = \vec{\nabla} U \cdot d\vec{\ell}$$

Soient A_ρ, A_θ et A_z les composantes du vecteur gradient de la fonction U, tel que :

$$\vec{A} = \vec{\nabla} U = A_\rho \vec{u}_\rho + A_\theta \vec{u}_\theta + A_z \vec{u}_z$$

et le déplacement infinitésimal (élémentaire) $d\vec{\ell}$ dans le système de coordonnées cylindriques est donné par

$$d\vec{\ell} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

le produit scalaire des deux dernières expressions ci-dessus donne :

$$\vec{\nabla} U \cdot d\vec{\ell} = A_\rho d\rho + A_\theta \rho d\theta + A_z dz = dU$$

d'autre part on a

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial U}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

par identification, on obtient les composantes du vecteur gradient de la fonction U sous la forme :

$$A_\rho = \frac{\partial U}{\partial \rho}, \qquad A_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta} \qquad \text{et} \qquad A_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

2. en coordonnées sphériques (r, θ, φ) : la variation infinitésimale d'une fonction U dépendant des coordonnés sphériques est donnée par :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial r}dr + \frac{\partial U}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial U}{\partial \varphi}d\varphi$$

mais on sait aussi que

$$dU = \vec{\nabla}U \cdot d\vec{\ell}$$

Soient A_r, A_θ et A_φ les composantes du vecteur gradient de la fonction U, tel que :

$$\vec{A} = \vec{\nabla}U = A_r\vec{u}_\rho + A_\theta\vec{u}_\theta + A_\varphi\vec{u}_\varphi$$

et le déplacement infinitésimal (élémentaire) $d\vec{\ell}$ dans le système de coordonnées sphériques est donné par

$$d\vec{\ell} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)d\varphi\vec{u}_\varphi$$

le produit scalaire des deux dernières expressions ci-dessus donne :

$$\vec{\nabla}U \cdot d\vec{\ell} = A_r dr + A_\theta r d\theta + A_\varphi r\sin(\theta)d\varphi = dU$$

d'autre part on a

$$dU = \frac{\partial U}{\partial r}dr + \frac{\partial U}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial U}{\partial \varphi}d\varphi$$

par identification, on obtient les composantes du vecteur gradient de la fonction U sous la forme :

$$A_r = \frac{\partial U}{\partial r}, \qquad A_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} \qquad \text{et} \qquad A_\varphi = \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

Exercice 11 :

La direction de la variation maximale de la fonction $f(x, y, z) = yz + xz + xy$ est obtenue en calculant son gradient, à savoir :

$$\vec{\nabla}f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

ou encore

$$\vec{\nabla}f(x, y, z) = (z + y)\vec{i} + (z + x)\vec{j} + (y + x)\vec{k}$$

Le vecteur donnant la direction de la variation maximale de f en $(1, 1, 1)$ est donné par :

$$\vec{\nabla}f(x, y, z) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Le vecteur unité $\vec{u}$ porté par ce vecteur est donné par :

$$\vec{u} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

Exercice 12 :

Trouver l'équation du plan tangent à la surface $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ au point $(1, -1, 2)$: trouvons l'expression d'une normale (vecteur perpendiculaire) à la surface au point $(1, -1, 2)$. Pour cela calculons le gradient de la fonction $2xz^2 - 3xy - 4x$,

$$\vec{\nabla}(2xz^2 - 3xy - 4x) = (2z^2 - 3y - 4)\vec{i} - (3x)\vec{j} + (4xz)\vec{k}$$

alors la normale à la surface au point $(1, -1, 2)$ est

$$\vec{N} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 8\vec{k}$$

L'équation d'un plan passant par un point de vecteur de position $\vec{r}_0$ et perpendiculaire à la normale $\vec{N}$ est

$$(\vec{r}_0 - \vec{r}) \cdot \vec{N} = 0$$

Alors l'équation cherchée est

$$\left[(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) - (\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})\right] \cdot (7\vec{i} - 3\vec{j} + 8\vec{k}) = 0$$

ou encore

$$7(x - 1) - 3(y + 1) + 8(z - 2) = 0$$

Exercice 13 :

1. On a

$$r^n = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}}$$

avec

$$\vec{\nabla}(r^n) = \frac{\partial r^n}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial r^n}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial r^n}{\partial z}\vec{k}$$

Mais, on a

$$\frac{\partial r^n}{\partial x} = \frac{n}{2}(2x)(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}-1}$$

ou encore

$$\frac{\partial r^n}{\partial x} = n\, x\, r^{n-2}$$

ce qui, en généralisant pour les autres composantes, donne :

$$\vec{\nabla}(r^n) = n\, r^{n-2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = n\, r^{n-2}\vec{r} = n\, r^{n-1}\vec{u}_r \qquad \text{où} \qquad \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

2. De cette expression générale, on peut déduire les expressions suivantes :

$$\vec{\nabla} r^4 = 4\, r^3 \vec{u}_r \qquad \text{et} \qquad \vec{\nabla}\frac{1}{r^2} = \frac{-2}{r^3}\vec{u}_r$$

3. Il est clair que le taux de variation de la fonction r^n est constant pour la valeur $n = 1$, car pour cette valeur

$$\vec{\nabla} r = \vec{u}_r$$

Exercice 14 :

Vérifier en coordonnées cartésiennes l'égalité suivante :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

Pour cela, prenons le vecteur

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

avec

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

et

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{k}$$

D'autre part,

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

et

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} & \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} & \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Enfin

$$\Delta\vec{A} = \Delta A_x\vec{i} + \Delta A_y\vec{j} + \Delta A_z\vec{k}$$

ou encore

$$\Delta\vec{A} = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{k}$$

En utilisant ces expressions, il est facile de vérifier l'égalité ci-dessus.

Exercice 15 :

1. Calcul de la divergence du vecteur $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\mathrm{div}\vec{r} = \vec{\nabla}\cdot\vec{r} = (\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z})(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 3$$

2. Calcul de la divergence du vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$.

$$\mathrm{div}\vec{u} = \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}\right)$$

ou encore

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial\left(\frac{x}{r}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{y}{r}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{z}{r}\right)}{\partial z}$$

avec

$$\frac{\partial\left(\frac{x}{r}\right)}{\partial x} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, \qquad \frac{\partial\left(\frac{y}{r}\right)}{\partial y} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\left(\frac{z}{r}\right)}{\partial z} = \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}$$

ce qui, après calcul, donne

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{2}{r}$$

3. L'expression du Laplacien est donnée par

$$\Delta r = \mathrm{div}\left(\vec{\mathrm{grad}} r\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}r$$

avec

$$\vec{\nabla}r = \vec{u}_r$$

ce qui donne

$$\Delta r = \vec{\nabla}\cdot\vec{u}_r = \frac{2}{r}$$

La valeur du Laplacien $\Delta(r)$ au point $(+1, +1, +1)$ est donc égale

$$\Delta r = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Exercice 16 :

Soit la fonction : $\varphi(x, y, z) = x\,y^2 + y\,z^2 + z\,x^2$

1. Calcul de $\vec{A} = \vec{\nabla}\varphi$ et son expression au point $(1, 1, 0)$.

$$\vec{\nabla}\varphi = (y^2 + 2zx)\vec{i} + (2xy + z^2)\vec{j} + (2yz + x^2)\vec{k}$$

et au point $(1, 1, 0)$, il est égal à $1\vec{i} + 2\vec{j} + 1\vec{k}$

2. Calcul de $\vec{B} = \vec{\text{Rot}}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + 2zx & 2xy + z^2 & 2yz + x^2 \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

Ceci est un résultat général, à savoir le rotationnel d'un gradient est toujours un vecteur nul. En effet, si

$$\vec{A} = \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}$$

on aura

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

ou encore

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}\right)\vec{k} = \vec{0}$$

(a) calcul de :

$$\vec{\nabla} \wedge (x\,\vec{i}) = \vec{0}$$

La structure de ce champ de vecteur $\vec{A} = x\,\vec{i}$ n'entraine pas de rotation d'un objet dans l'espace, c'est pour ça que son rotationnel est nul.

(b) calcul de :

$$\vec{\nabla} \wedge (y\,\vec{i}) = -\vec{k}$$

La structure de ce champ de vecteur $\vec{A} = y\,\vec{i}$ peut entrainer une rotation d'un objet dans l'espace dans le plan xOy dans la direction horaire, c'est pour ça que son rotationnel est égal $-\vec{k}$.

(c) le rotationnel d'un vecteur dans les coordonnées sphériques s'écrit sous la forme :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{u}_\varphi$$

dans le cas où $\vec{A} = \vec{u}_\theta$, on a $A_r = 0$, $A_\theta = 1$ et $A_\varphi = 0$, on aura

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r}\vec{u}_\varphi$$

Cela signifie qu'un objet plongé dans un champ vectoriel de la forme $\vec{A} = \vec{u}_\theta$ va subir une rotation dont le vecteur est suivant $\vec{\varphi}$ avec un module égal à $\dfrac{1}{r}$.
Dans le cas où $\vec{A} = \frac{1}{r}\vec{u}_\theta$, on aura

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{0}$$

Un objet plongé dans ce champ vectoriel ne subit aucune rotation.

3. Calculons tout d'abord :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial C_z}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Calculons maintenant $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{C})$:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{C}) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right] \cdot \left[\left(\frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial C_z}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$

ou encore

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{C}) = \left(\frac{\partial^2 C_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 C_y}{\partial z \partial x}\right) - \left(\frac{\partial^2 C_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 C_x}{\partial z \partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 C_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 C_x}{\partial y \partial z}\right) = 0$$

Exercice 17 :

1. On donne le champ de vecteurs

$$\vec{A}(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

Les points indiqués dans l'énoncé représentent les points d'application des quatre vecteurs du champ vectoriel $\vec{A}$ en ces points. Les vecteurs sont donnés par :

$$\vec{A}(1,1,0) = -\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{A}(1,-1,0) = \vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{A}(-1,1,0) = -\vec{i} - \vec{j}, \quad \text{et} \quad \vec{A}(-1,-1,0) = \vec{i} - \vec{j}$$

Les quatre vecteurs ont le même module, à savoir :

$$|\vec{A}(-1,-1,0)| = |\vec{A}(1,1,0)| = |\vec{A}(1,-1,0)| = |\vec{A}(-1,1,0)| = \sqrt{2}$$

Alors que les vecteurs unités sont donnés par :

$$\vec{u}(1,1,0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}, \quad \vec{u}(1,-1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}, \quad \vec{u}(-1,1,0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

et

$$\vec{u}(-1,-1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

Pour les représenter on doit tracer chaque vecteur à partir de son point d'application.

2. La divergence du champ $\vec{A}$ est donnée par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x, y) = 0$$

Ce résultat signifie que le bilan du flux (flux entrant+ flux sortant) du champ $\vec{A}$ est nul pour tout volume infinitésimal.

3. Le rotationnel du champ $\vec{A}$ est donné par :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x, y) = 2\vec{k}$$

Ce résultat signifie que le champ vectoriel $\vec{A}$ fournit une rotation autour d'un axe parallèle à $\vec{k}$ en tout point de l'espace avec un module 2. Physiquement, ce champ peut faire tourner un objet qui y est plongé.

Exercice 18 :

Le théorème de divergence (Green-Ostrogradsky) s'énonce comme suit :

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, dV;$$

1. Pour le vecteur $\vec{A}(r, \theta, \varphi) = r^2 \vec{u}_r$ sur une sphère de rayon R, la surface infinitésimale est donnée par

$$d\vec{S} = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$$

ce qui donne

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_S R^2\, R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi R^4$$

D'autre part, la divergence du vecteur $\vec{A}$ en coordonnées sphériques est donnée par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

ce qui, pour $\vec{A}(r, \theta, \varphi) = r^2 \vec{u}_r$, donne

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 4\, r$$

avec le volume infinitésimal

$$dV = r^2\, dr\, \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, dV = \iiint 4\, r^3\, dr\, \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi R^4$$

Le théorème est ainsi vérifié sur cet exemple.

2. Utiliser le vecteur $\vec{A}(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ pour vérifier ce théorème sur un cube d'arête a. Calculons tout d'abord

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial x} = 3$$

Ce qui donne

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz 3 = 3abc$$

D'autre part, le cube considéré a 6 faces. de ce fait, l'intégrale fermée s'obtient comme suit :

$$\oint \vec{A} d\vec{S} = \iint_1 \vec{A} \cdot d\vec{S} + \iint_2 \vec{A} \cdot d\vec{S} + \iint_3 \vec{A}\vec{S} + \iint_4 \vec{A} \cdot d\vec{S} + \iint_5 \vec{A}\vec{S} + \iint_6 \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

où les intégrales se font sur chacune des 6 surfaces du cube. En effet, il est facile de vérifier que

$$\iint_1 \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_1 \vec{A} \cdot dy\, dz\, d\vec{i} = \int_0^b dy \int_0^c A_x(a) dz,$$

$$\iint_2 \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_2 \vec{A} \cdot (-dy\, dz\, d\vec{i}) = -\int_0^b dy \int_0^c A_x(0) dz,$$

$$\iint_3 \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_3 \vec{A} \cdot dx\, dz\, d\vec{i} = \int_0^a dx \int_0^c A_y(b) dz,$$

$$\iint_4 \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_4 \vec{A} \cdot (-dy\, dz\, d\vec{i}) = -\int_0^a dx \int_0^c A_y(0) dz,$$

$$\iint_5 \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_5 \vec{A} \cdot dx\, dy\, d\vec{i} = \int_0^a dx \int_0^b A_z(c) dy$$

et

$$\iint_6 \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_6 \vec{A} \cdot (-dy\, dy\, d\vec{i}) = -\int_0^a dx \int_0^b A_z(0) dy,$$

avec

$$A_x(a) = a, \quad A_x(0) = 0, \quad A_y(b) = b, \quad A_y(0) = 0, \quad A_z(c) = c, \quad \text{et} \quad A_z(0) = 0$$

ce qui donne enfin

$$\oint \vec{A} d\vec{S} = 3abc$$

Cela vérifie le théorème ci-dessus.

Exercice 19 :

On donne le potentiel $V(x, y, z) = yz + xz + xy$

1. Le champ $\vec{E}$ qui dérive du potentiel V s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = (z + y)\vec{i} + (z + x)\vec{j} + (y + x)\vec{k}$$

Le signe moins qu'on a l'habitude de mettre devant le gradient a une signification physique qu'on ne traite pas ici.

2. Le flux élémentaire $d\Phi$ d'un vecteur qui passe à travers une surface $d\vec{S}$ est donné par :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Pour calculer le flux à travers la surface ouverte considérée, on doit choisir une direction de la surface, soit $d\vec{S} = dS\vec{k}$, qui, dans le cas de coordonnées cartésiennes, s'écrit :

$$d\vec{S} = dx\, dy\vec{k}$$

Le flux total de $\vec{E}$ à travers la surface considérée est égal à

$$\Phi = \int\int \vec{E} \cdot dx\, dy\vec{k} = \int\int (y + x) dx\, dy$$

Remarquons que la variable x varie entre $x = 0$ et $x = 1$, alors que la variable y varie entre $y = 0$ et $y = -x + 1$, ce qui nous permet de réécrire l'intégrale ci-dessus comme

$$\Phi = \int_0^1 dx \int_0^{-x+1} y dy + \int_0^1 dx \int_0^{-x+1} x dy$$

ou encore

$$\Phi = \int_0^1 \left(\frac{(-x + 1)^2}{2} + x(-x + 1)\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + 2x) dx = \frac{1}{3}$$

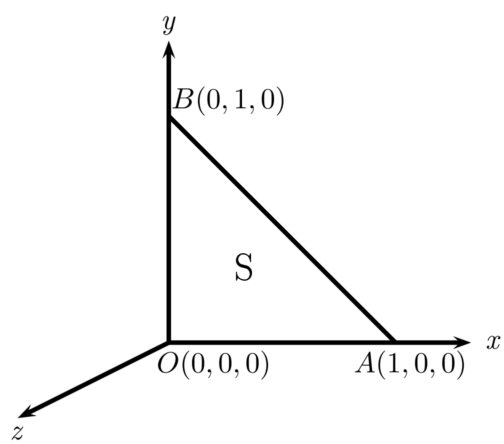
3. Calcul de la circulation de $\vec{E}$ le long du contour triangulaire fermé $OABO$:
Par définition, la circulation du vecteur $\vec{E}$ le long d'un contour fermé $OABO$ est donné par :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_O^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^O \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Le long de la droite OA, l'élément $d\vec{\ell}$ est égal à $d\vec{\ell} = dx\vec{i}$ et est égal à $d\vec{\ell} = -dx\vec{i} + dy\vec{j}$ le long de la droite AB, alors qu'il est égal à $d\vec{\ell} = -dy\vec{j}$. Cela nous permet d'écrire :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 (z + y) dx - \int_0^1 (z + y) dx + \int_0^1 (z + x) dy - \int_0^1 (z + x) dy$$

La circulation le long d'un contour fermé d'un vecteur dérivant d'une fonction est toujours nul.


y
B(0, 1, 0)
S
x
O(0, 0, 0)
A(1, 0, 0)
z