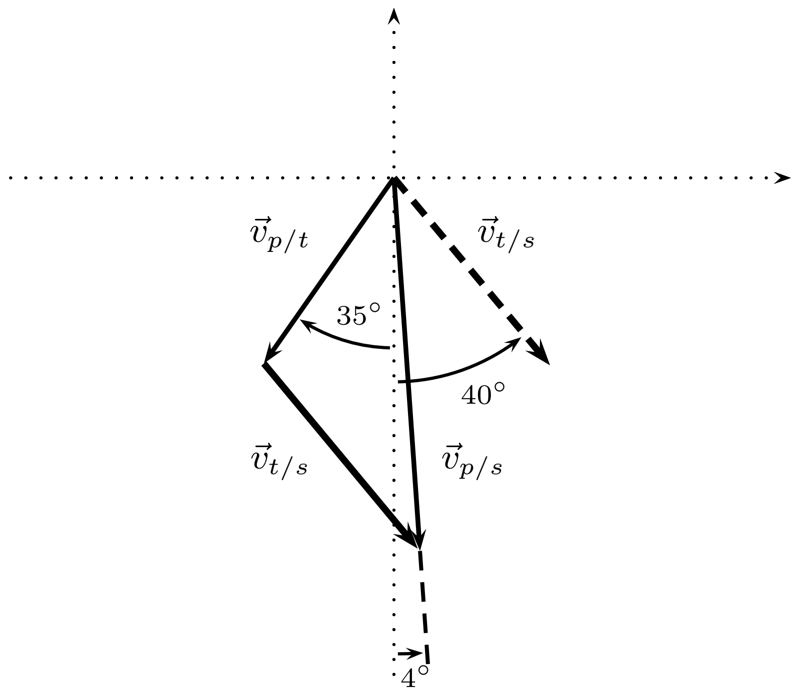
École Préparatoire en Sciences et Techniques de Tlemcen

Département de Physique

PHYSIQUE I – Corrigé de l'examen de synthèse

3 mars 2013

1. Soit les indices suivantes : p pour $p$luie, s pour $s$ol et t pour $t$rain.
   (a) La loi de composition des vitesses s'écrit :
   $$\vec{v}_{p/s} = \vec{v}_{p/t} + \vec{v}_{t/s} \qquad \boxed{0.5}$$
   d'où
   $$\vec{v}_{t/s} = \vec{v}_{p/s} - \vec{v}_{p/t} \qquad \boxed{0.25}$$
   La projection des vecteurs vitesses sur les axes principaux donne
   $$\begin{cases} (v_{t/s})_x &= (v_{p/s})_x - (v_{p/t})_x \\ (v_{t/s})_y &= (v_{p/s})_y - (v_{p/t})_y \end{cases} \qquad \begin{array}{c}\boxed{0.25}\\ \boxed{0.25}\end{array}$$
   Application numérique :
   $$\begin{cases} (v_{t/s})_x &= +33\sin(4) - (-20)\sin(35) = +13.77 \text{ m s}^{-1} \\ (v_{t/s})_y &= -33\cos(4) - (-20)\cos(35) = -16.54 \text{ m s}^{-1} \end{cases} \qquad \begin{array}{c}\boxed{0.25}\\ \boxed{0.25}\end{array}$$
   De ce fait, la norme de la vitesse de croisière du train est
   $$v_{t/s} = \sqrt{(v_{t/s})_x^2 + (v_{t/s})_y^2} = 21.52 \text{ m s}^{-1} \sim 77.78 \text{ km/h} \qquad \boxed{0.5+0.5}$$
   La direction de ce vecteur est
   $$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{(v_{t/s})_x}{(v_{t/s})_y}\right| = \tan^{-1}\frac{13.77}{16.54} = 39.78^\circ \sim 40^\circ \qquad \boxed{0.5+0.5}$$
   avec la verticale dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. $\boxed{0.5}$



(b) *Schéma ci-dessus* $\boxed{1}$

(c) La loi de l'optique géométrique sur laquelle est basée le fonctionnement des essuie-glaces automatiques est la loi de Snell-Descartes

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2 \qquad \boxed{0.5}$$

où n_1, n_2 sont les indices optiques des milieux d'incidence et de réfraction, alors que α_1, α_2 sont les angles d'incidence et de réfraction. Lorsque la lumière passe d'un milieux plus réfringent vers un milieux moins réfringent ($n_1 > n_2$), l'angle de réfraction sera toujours supérieur à l'angle d'incidence ($\alpha_1 < \alpha_2$). À partir d'un angle d'incidence limite α_{1l}, il n'y aura plus de réfraction et toute la lumière sera réfléchie, on a affaire à une *réflexion totale*. $\boxed{0.5}$

2. (a) Dans sa *chute libre*, une goutte de pluie n'est soumise qu'à son poids. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad i.e., \quad \vec{p} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{d'où} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}. \qquad \boxed{0.5}$$

On prendra ici l'axe (Oy) dirigé vers le haut. Après projection

$$\frac{dv}{dt} = -g \qquad \boxed{0.5}$$

La dernière équation peut sécrire

$$\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = -g \quad i.e., \quad \frac{dv}{dy}v = -g \qquad \boxed{0.25+0.25}$$

d'où

$$vdv = -gdy \qquad \boxed{0.5}$$

Par intégration

$$\int_{v_0}^{v} vdv = -g\int_{y_0}^{y} dy \qquad \boxed{0.25}$$

À la hauteur y_0, la vitesse intiale est $v_0 = 0$ (repos). On trouve alors

$$v = \sqrt{ag(y_0 - y)} \qquad \boxed{0.5}$$

(b) Le principe de conservation de l'énerige mécanique s'écrit

$$E_c(y_0) + E_p(y_0) = E_c(y) + E_p(y) \qquad \boxed{0.5}$$

Explicitement, on écrit

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgy_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \qquad \boxed{0.5}$$

d'où

$$v = \sqrt{ag(y_0 - y)} \qquad \boxed{0.5}$$

(c) *Application numérique :* $y_0 - y = 3 \times 10^3$ m On trouve $v = 76.72$ m s^{-1} $\sim$ 276 km/h. *Cette vitesse n'est vraisemblablement pas raisonnable !* $\boxed{0.25+0.25}$

(d) i. La force de résistance de l'air s'écrit $f = kv$ où la dimension de k est $[k] = MT^{-1}$. $\boxed{0.5}$

ii.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad i.e., \quad \vec{p} + k\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{d'où} \quad m\vec{g} + k\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad \boxed{0.5}$$

Après projection, on obtient

$$-mg + kv = m\frac{dv}{dt} \qquad \boxed{0.5}$$

iii. Initialement, la vitesse est nulle, puis elle augmente avec l'accélération de la pesanteur en raison de 9.81 m/s^2 toutes les secondes, jusqu'au moment où $mg = kv$. À cet instant, l'accélération $\dfrac{dv}{dt} = 0$ et la vitesse aura ainsi atteint une valeur limite $\boxed{0.5}$

$$v_l = \frac{m}{k}g$$

iv. L'équation de la dynamique peut s'écrire

$$\frac{mg}{k} - v = -\frac{m}{k}\frac{dv}{dt} \quad \text{où} \quad \frac{mg}{k} = v_l.$$

Une séparation des variables v et t donne

$$\frac{dv}{v_l - v} = -\frac{k}{m}dt \qquad \boxed{0.5}$$

Par intégration

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v_l - v} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt \qquad \boxed{0.25}$$

À l'instant $t = 0$, $v = v_0 = 0$. On trouve alors

$$\ln(\frac{v_l}{v_l - v}) = -\frac{k}{m}t \qquad \boxed{0.5}$$

ou bien encore

$$v = v_l(1 - e^{-\frac{kt}{m}}) \qquad \boxed{0.5}$$

La vitesse v tend vers v_l uniquement lorsque $t \to \infty$; les gouttes de pluie ne pourront pas atteindre cette limite dans un intervalle de temps fini ! $\boxed{0.5}$

v. L'accélération est

$$a = \frac{dv}{dt} = v_l(\frac{k}{m}e^{-\frac{kt}{m}}) \qquad \boxed{0.25}$$

d'où

$$a = ge^{-\frac{kt}{m}} \qquad \boxed{0.5}$$

La position est donnée par

$$y = \int_0^t v\,dt = \int_0^t v_l(1 - e^{-\frac{kt}{m}})dt \qquad \boxed{0.25}$$

On trouve donc

$$y = v_l(t - \frac{m}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}})) \qquad \boxed{0.5}$$

3. (a) Les chocs que subissent les gouttes de pluie sont *parfaitement inélastiques* ou *mous*, car après collision les gouttes adhèrent les unes aux autres et continuent ainsi leurs trajectoires comme un seul corps. $\boxed{0.5+0.5}$

   (b) Dans ce cas la masse varie dans le temps ! L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{avec} \quad \sum \vec{F} = m\vec{g} \quad \text{(pas de frottement)} \qquad \boxed{0.25}$$

D'un côté, nous avons

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} \qquad \boxed{0.5}$$

d'où

$$y\frac{dv}{dt} + v^2 = -yg \qquad (*) \qquad \boxed{0.5}$$

   (c) la vitesse est $v = at$, d'où $\frac{dv}{dt} = a$ et $y = \frac{1}{2}at^2$ (vitesse initiale nulle). On remplace y dans l'équation $(*)$: $\boxed{0.5}$

$$-\frac{1}{2}at^2 g = \frac{1}{2}at^2 a + a^2t^2$$

d'où

$$a = \frac{-g}{3}. \qquad \boxed{0.5}$$

■

Total des points = Partie 1 (6.25 points) + Parite 2 (10.5 points) + Partie 3 (3.25 points) = 20 points