Série de TD n°02

Transformations de Laplace- Transformation de Fourier

Exercice 01 :

1. Déterminer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

$$f(t) = e^{-4t}\sin(5t) \qquad g(t) = t^2\cos(t-1) \qquad h(t) = t^2U(t-3) - t^3U(t-8)$$

$$(U\ la\ fonction\ de\ Heaviside) \quad R(t) = \begin{cases} 1 - t\ si\ 0 < t < 1 \\ R(t) = R(t+1) \end{cases} \qquad k(t) = |cost|$$

2. Déterminer les originaux de :

$$F(p) = \frac{1-e^{-2p}}{p^2+3p+2} \quad G(p) = \frac{6p+18}{(p+2)^4} \quad H(p) = \frac{p^2}{(p+3)^3} \qquad K(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)}$$

Exercice 02 : Résoudre :

1) $y"(t) + 4y(t) = \sin(2t), y(0) = y'(0) = 0$
2) $ty"(t) - (2t+1)y'(t) + (t+1)y(t) = 0, y(0) = -3\ et\ y'(1) = 0$
3) $t + 2\int_0^t e^{-\tau}\cos(2\tau)\, y(t-\tau)d\tau = y(t), t \geq 0$
4) $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 = 0, x > 0\ et\ t > 0 \\ u(x,0) = 0, u(0,t) = 0\ et\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \end{cases}$

Exercice 03 : Calculer les intégrales suivantes en utilisant la transformation de Laplace :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1 - cosat}{t^2} dt$$

Exercice 04 : Trouver les transformées de Fourier des fonctions :

$$1) f(x) = \begin{cases} 1\ si |x| \leq a \\ 0\ si\ |x| > a \end{cases} \quad 2)\ g(x) = \begin{cases} 1 - x^2\ si\ |x| < 1 \\ 0\ si\ |x| \geq 1 \end{cases}$$

En déduire la valeur des intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sinax\ costx}{x} dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{sinx}{x} dx \qquad \int_0^{+\infty} \left(\frac{sinx}{x}\right)^2 dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{xcosx - sinx}{x^3} cos\frac{x}{2}\ dx \qquad \int_0^{+\infty} \left(\frac{xcosx - sinx}{x^3}\right)^2 dx$$

Exercice 05 : Trouver la foction f vérifiant l'équation intégrale :

$$\int_0^{+\infty} f(x) sinax\, dx = \begin{cases} 1 - a \ si\ 0 \leq a \leq 1 \\ 0\ si\ a > 1 \end{cases}$$

Exercice 06 : Résoudre :

$$(E)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x > 0, t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, u(x,0) = \begin{cases} x\ si\ 0 < x < 1 \\ 0\ si\ x > 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$(S)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x, 0 < x < 1\ et\ t > 0 \\ u(0,t) = 0, u(1,0) = 0, u(x,0) = x - x^2\ si\ 0 < x < 1 \end{cases}$$