Série de TD n°05-Séries de Fourier

Exercice 01 : Soit la fonction $f(x) = x - E(x)$

1. Montrer qu'elle est périodique, déterminer sa période et calculer ses coefficients de Fourier.
2. Quels théorèmes de convergence peut-on lui appliquer ?
3. En déduire les sommes des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Exercice 02 : Développer en série de Fourier la fonction définie par

$$f(x) = \sup(sinx, 0)$$

En déduire les sommes des séries numériques suivantes :

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}$$

Exercice 03 : Soit la fonction impaire, 2π-périodique, définie par

$$f(x) = x(\pi - x) pour\ x \in [0, \pi]$$

Déterminer sa série de Fourier et étudier sa convergence.

En déduire les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$$

Exercice 04 : Soit la fonction, 2π-périodique, $g(x) = |sinx|$

1. Justifier la convergence de la série de Fourier de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier correspondants, En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}\ et\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$
3. Soit f une fonction paire de classe C^2 et 2π-périodique, notons $a_n(f)$ ses coefficients de Fourier. Montrer que $a_n(f") = -n^2 a_n(f)$.
4. Trouver une solution particulière et 2π-périodique de l'équation différentielle $y" + y = g(x)$.