Série de TD n°04- Séries entières

Exercice 01 : Déterminer le rayon et le domaine de convergence des séries entières :

1) $\sum_{n\geq 1}(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n})x^n$ 2) $\sum_{n\geq 0}\frac{n!}{1.3\ldots(2n+1)}x^{2n+1}$ 3) $\sum_{n\geq 1}n^{\sqrt{n}}z^n$

4) $\sum_{n\geq 0}(3+\cos n)(z+2i)^n$ 5) $\sum_{n\geq 0}\sin\frac{n\pi}{3}x^n$ 6) $\sum_{n\geq 1}e^n z^{n^3}$

7) $\sum_{n\geq 0}2^n z^{n!}$ 8) $\sum_{n\geq 1}n^{(-1)^n}x^n$ $Supp$: $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{1+k^3}\right)x^n$, $\sum_{n\geq 1}\left(\int_0^1\frac{e^t t^n dt}{(1+t^2)^n}\right)$

Exercice 02 : Vérifier la convergence et calculer la somme des séries :

$$1)\sum_{n\geq 1}x^n\cos nx \qquad 2)\sum_{n\geq 1}\frac{chn}{n}z^n \qquad 3)\sum_{n\geq 1}x^n\frac{sinnx}{n}$$

$$4)\sum_{n\geq 1}x^n\frac{\cos nx}{n} \qquad 5)\sum_{n\geq 0}n^2x^n \qquad 6)\sum_{n\geq 0}\frac{\cos n\theta}{n!}x^n$$

$$7)\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3n+1} \qquad 8)\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n n\,x^n}{(2n)!} \qquad 9)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$$

Exercice 03 : Développer en séries entières autour de l'origine :

$$1)\ \frac{2x+4}{(x-2)(x-3)} \qquad 2)\ \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 \qquad 3)(\sin x\ \ shx)^2$$

$$4)\ e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad 5)\ \ln\sqrt{1-2x\cos\alpha+x^2} \qquad 6)\ \frac{z\ sin\alpha}{z^2-2zcos\ \alpha+1}$$

Exercice 04 : Chercher sous forme de série entière la solution de :

$$1)4xy''+2y'-y=0;y(0)=1$$
$$2)\ y''+xy'+y=1$$
$$3)\ x^2y''-2xy'+(2-x^2)y=0;y(0)=0\ et\ y'(0)=1$$

Exercice 05 : Soit $F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1+xsin^2(t)\right)dt\,;x\in\,]-1{,}1[\ et\ I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^n(t)dt$

1. Calculer I_0, I_1, puis vérifier que $\forall n\geq 2;\ I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$. En déduire les valeurs de $I_{2p}etI_{2p+1}$.
2. Déterminer le développement en série entière en $u$de $\ln(1+u)$ et préciser le rayon de convergence.
3. En déduire que $\ln\left(1+xsin^2(t)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{sin^{2n}(t)}{n}x^n\ \ pour\ x\in\,]-1{,}1[$.
4. En déduire le développement en série entière en x de $F(x)$.Vous en précisez le rayon de convergence.

<u>Résumé-Séries entière</u>-

- **Définition :** On appelle série entière toute série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$dont le terme général est de la forme $f_n(z) = a_n z^n$; $z \in \mathbb{C}$ $(resp. a_n(z - z_0)^n)$ où $(a_n)_n$ désigne une suite réelle ou complexe.
- **Lemme d'Abel :** Si la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge pour un complexe $z_0 \neq 0$ alors elle est absolument convergente pour tout complexe z vérifiant$|z| < |z_0|$. Et si la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge pour un complexe $z_0 \neq 0$ alors elle est divergente pour tout complexe z vérifiant$|z| > |z_0|$.
- **Théorème :** Il existe un réel R positif ou nul ou éventuellement infini, possédant les propriétés :
  - Pour tout z tel que $|z| < R$; la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument.
  - Pour tout z tel que $|z| > R$; la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge.

R est dit <u>rayon de convergence</u>. $R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \; pour\; les\; quels\; \sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ converge } \}$

- Le disque centré en z=0 (resp.$z = z_0$) et de rayon R est dit disque de convergence.
- Si la limite $l = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe ; le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n \; est\; R = \frac{1}{l}$
- La série $\sum_{n\geq 0} a_n z^{\varphi(n)}$ est une série entière dont on calcule le rayon de convergence en appliquant le critère de D'Alembert ou de Cauchy de convergence absolue : $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1} z^{\varphi(n+1)}}{a_n z^{\varphi(n)}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n z^{\varphi(n)}|}$
- Une série entière converge <u>normalement</u> sur toute boule fermée centrée en z=0 contenue dans le disque de convergence ouvert.
- **Théorème de continuité :** La somme d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ $(x\; réel)$ est une fonction f continue sur l'intervalle ouvert]-R,R[. Si la série converge aussi pour x=R(resp x=-R)alors la somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue à gauche de x=R(resp. à droite de x=-R)
- **Théorème d'intégration :** Les primitives F de la somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sont données sur $]-R, R[\; par\; F(x) = c + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$
- **Théorème de dérivation :** La somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est dérivable sur $]-R, R[\; et\; l'on a\; f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ et possède le même rayon
- **Théorème :** Soit f une fonction $C^\infty(]-a, a[) et\; tq\; \exists M > 0;\; \forall n \geq 1; \forall x \in]-a, a[\; on\; a\; \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$.Alors]-a,a[, la fonction est somme d'une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ qui est de rayon $\geq a$. S'il existe le <u>développement en série entière autour de 0</u> est <u>unique</u>.
- **Propriétés :** Soit f et g fonctions développables en séries entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \; et \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$
  - $f + g$ est développable en S.E (0) et $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$
  - fg est développable en S.E (0) et $f(x)g(x) = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n)$
  - f' est développable en S.E (0) et $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$
  - La primitive F est développable en S.E (0) et $F(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$
  - Si f est paire alors$\forall n \geq 0, a_{2n+1} = 0$. Et si f est impaire$\forall n \geq 0, a_{2n} = 0$.