Série de TD n°03

Suites et Séries de fonctions

Exercice 01 : Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ 2) $f_n(x) = e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ 3) $f_n(x) = arctg(nx)$

supp: 4) $f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n & si\ 0 \leq x \leq n; \\ 0\ si\ x > n \end{cases}$ 5) $f_n(x) = n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Exercice 02 :

1) Soit la suite de fonctions , dont le terme général est $f_n(x) = n\,(\cos x)^n sinx$. Chercher la limite simple de cette suite, puis vérifier que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx \neq \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$. Que peut on déduire ?
2) Etudier la continuité des fonctions $f_n(x) = 2^{-nx}; x \geq 0$ et de la fonction $\equiv \lim_{n\to+\infty} f_n$. En déduire la nature de la convergence.
3) Soit la suite des fonctions $\begin{cases} f_n: &]0,1] \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^n \ln x \end{cases}$, Montrer qu'elle converge uniformément sur $]0,1]$. La suite (f'_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,1]$?

Exercice 03 : Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq1}$ définies sur $[0,+\infty[\ par$:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{\frac{x}{n}}-2}{n} & si\ 0 \leq x \leq n \\ 0\ si\ x > n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq1}$ converge uniformément vers une fonction f à déterminer.
2. Calculer $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx\ \ et\ \int_0^{+\infty} f(x)dx$, que peut on déduire ?

Exercice 04 : Trouver le domaine de convergence des séries de fonctions suivantes :

$$1)\sum_{n\geq1} e^{-nx^2}\sin(nx) \quad 2)\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}\left(\frac{x-3}{x-2}\right)^n$$

$$3)\sum_{n\geq1}\frac{(z-i)^{3n}}{a^n n} \quad 4)\sum_{n\geq1} x^n\frac{\sin(nx)}{n}$$

Exercice 05 : Etudier la convergence simple et uniforme des séries de fonctions :

$$1)\sum_{n\geq 1}(-1)^n \ln(1+\frac{x}{n}) \qquad 2)\sum_{n\geq 0}\frac{x}{(1+x^2)^n}$$

$$3)\sum_{n\geq 1}\frac{x\, e^{-nx}}{\ln n} \qquad 4)\sum_{n\geq 1}(th(nx)-th(n-1)x)$$

Exercice 06 : Soit la suite de fonctions définies par $f_n(x)=\frac{e^{-2nx}}{2n+1}, x\in\mathbb{R}\; et\; n\geq 0.$

1) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$. On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x)=(-1)^n\frac{e^{-2nx}}{2n+1}, x\in\mathbb{R}\; et\; n\geq 0.$
2) Trouver le domaine de convergence D_c de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}u_n(x)$
3) Etudier la convergence normale de la série $\sum_{n\geq 0}u_n(x)$ sur D_c.
4) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0}u_n(x)$ converge uniformément sur D_c, en déduire que sa somme S(x) est une fonction continue sur D_c. Calculer $\lim_{n\to+\infty}S(x)$.
   On pose $v_n(x)=e^{-x}u_n(x), \forall x\in D_c$
5) Etudier la dérivabilité de la série $\sum_{n\geq 0}v_n(x)$ sur $[a,+\infty[\;\forall a>0.$
6) Calculer $T(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}v_n'(x), \forall x>0$
7) Montrer que $\forall x>0, S(x)=e^x Arctg(e^{-x})$ et justifier que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$

Exercice 07 : Soit la série de fonction $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^x}$

1. Etudier, suivant les valeurs de x, la convergence simple de cette série.
2. Notons $(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^x}$, montrer que la série ne converge pas normalement sur $]1,+\infty[$.Etudier la convergence normale sur tout intervalle $[a,+\infty[, a>1.$
3. En déduire $\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)$
4. Montrer que ζ est dérivable sur tout intervalle $[a,+\infty[, a>1$ et calculer sa dérivée.
5. Montrer que ζ ne peut être majorée quand x tend vers 1, en déduire $\lim_{x\to 1}\zeta(x)$
6. Donner la représentation graphique de ζ.
7. Montrer que $\int_2^{+\infty}(\zeta(x)-1)dx=\sum_2^{+\infty}\frac{1}{n^2\ln n}$