Série de TD n°01 : « Intégrales multiples »

Exercice 01 : Exprimer $\iint_D f(x,y)dx\,dy$ sur les domaines cités :

- Région triangulaire de sommets (1,3), (2,1) et (-2,1).
- Région comprise entre les graphes d'équations $y = x^2$ et $x = y^2$.
- Région $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ tq \ x \leq 1, y \leq 1 \ et \ x + y \geq 1\}$.
- Région $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ tq \ x \leq x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$
- Région comprise entre les graphes d'équations $x^2 + y^2 = 9$ et $y^2 - x^2 = 1$(contient l'origine).

Exercice 02 : Calculer $\iint_D f(x,y)dx\,dy$ dans les cas suivants :

- $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ tq \ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq \ y \leq 1 \ et \ x^2 + y^2 \geq 1\} \ avec \ f(x,y) = \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}$
- D est l'intersection du disque unité et le disque centré en (1,1) de rayon 1 ; f(x,y)=xy.
- D est l'ensemble des points du plan vérifiant $|x| + |y| \leq 1; f(x,y) = e^{x+y}$.
- D est le rectangle $[0,a] \times [0,b], a > b \ et \ f(x,y) = |x - y|$
- Soient A(-1,1), B(1,1), C(1,3) , O(0,0) ; f(x,y)=x^2(y-1) et D est le domaine délimité par AC et BC et le demi cercle de diamètre AB contenant O.

Exercice 03 : Le but de cet exercice est le calcul de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$. Calculer de deux façons différentes l'intégrale $J = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x\,dxdy}{(1+x^2)(1+xy)}$, et en déduire la valeur de I.

Exercice 04 : Calculer :

- $\int_0^8 \int_{\frac{y}{2}}^4 \frac{1}{x} e^{\frac{3y}{x}} dxdy$
- D est le domaine contenant l'origine et limité par le cercle ((0,0) ;r=$\sqrt{5}$) et la droite y=-x-3 (Ind : $u = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, v = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$) avec f(x,y)=x+y.
- $\iint_D |x|y dx\,dy; D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ tels \ que \ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \leq 1\right\}$.
- $f(x,y) = x^2 + y^2; D = \{(x,y): x \geq 0, y \geq 0, 2 \leq xy \leq 4 \ et \ 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9\}$.

Exercice supplémentaire : Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$, définie comme la limite $\lim_{n\to+\infty} I_n$ où $I_n = \int_0^n e^{-x^2}dx$. Pour n entier naturel, considérons le quart de disque : $D_n = \{x^2 + y^2 \leq n^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ et le carré : $C_n = \{0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n\}$.

1) Calculer les intégrales $J_n = \iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \ et \ J_{2n} = \iint_{D_{2n}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ en utilisant le changement de variables en coordonnées polaires.

2) Considérons l'intégrale $K_n = \iint_{C_n} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$. Montrer que $K_n = I_n^2$.
3) A l'aide d'un dessin de $D_n, C_n\ et\ D_{2n}$, expliquer pourquoi $J_n \leq K_n \leq J_{2n}$.
4) Quelle est la limite de $J_n, J_{2n}\ et\ K_n$ quand n tend vers l'infinie ? Trouver I.

Exercice 05 : Soit la fonction $g: [a,b] \to \mathbb{R}^+$ dans le plan (YOZ), considérons la courbe ϕ d'équation y=g(z). En faisant tourner cette courbe autour de l'axe (OZ) on engendre une surface de révolution ∑ .

1) Pour $z_0 \in [a,b]$ fixé ; le plan horizontal d'équation $z = z_0$ coupe ∑ selon une courbe, quelle est son équation ?
2) Le plan (YOZ) coupe ∑ selon la courbe ϕ. Exprimer le volume V ; de l'espace limité par ∑ et les deux disques formants les couvercles situés dans les plans Z=a et Z=b ; sous forme
   $V = \iint_D\ f(y,z) dy\, dz.$
3) <u>Applications :</u>

- Calculer le volume d'un cône de révolution d'axe (OZ) de sommet O, de hauteur h et dont le cercle de base est de rayon r.
- Calculer le volume de l'ellipsoïde de révolution dont le section circulaire a pour rayon r et dont le grand axe a pour longueur 2a.

Exercice 06 : Calculer :

- $\iiint_D (x^2+y^2+z) dx\, dy\, dz, avec\ D = \{(x,y): x^2+y^2 \leq 9\ et -5 \leq z \leq 5\}$
- $\iiint_D \frac{z}{x^2+y^2+z^2} dxdydz\ avec\ D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ tq\ 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 2, z \geq 0\}$
- $\iiint_D\ z\cos(x^2+y^2)\, dxdydz\ avec\ D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ tq\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$
- $\iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq 1} z\, dxdydz$

Exercice 07 :

- Calculer la masse d'un solide délimité par les courbes d'équations
  $4x + 2y = 1, 4x + 2y = 9, y = x\ et\ y = 6x$ et dont la densité est $\rho = \frac{1}{y}$
- Calculer le volume de la partie délimité par la sphère centrée à l'origine et de rayon 1 et le cylindre d'équation $x^2+y^2 - y = 0$.
- Calculer le volume délimité par l'intersection des deux cylindres $x^2+y^2 \leq 9\ et\ x^2+z^2 \leq 9$
- Calculer l'aire de la partie de la demie sphère $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$ découpée par le cylindre elliptique $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.
- Calculer (en coordonnées sphériques) le volume du corps limité par la sphère $x^2+y^2+z^2 = a^2$ et le cône $x^2+y^2 = z^2$ (l'extérieur par rapport au cône).
- Calculer l'aire de la portion du plan $x + 2y + z = 4$ à l'intérieur du cylindre $x^2+y^2 = 4$.
- Calculer le volume sous le plan x+z=3, au dessus du plan x+z=0 et à l'intérieur du cylindre $x^2+y^2=16$ et extérieur du cylindre $x^2+y^2=4$.