Module : Analyse 03

Série de TD - Rappels et révisions-

Fonctions réelles de plusieurs variables

Exercice 01 : Déterminer le domaine d'existence des fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + \sqrt{4-x^2-y^2}$ b) $g(x,y) = \sqrt{1-xy}$

c) $h(x,y,z) = \sqrt{1-|x|-|y|-|z|}$ d) $k(x,y,z) = arcsin\sqrt{x} + arcsin\sqrt{y} + arcsin\sqrt{z}$

Exercice 02:

1) Soit la fonction g définie par : $g(x,y) = \frac{x^p y^q}{x^2-xy+y^2}$, tels que p et q deux entiers naturels non nuls. Déterminer son domaine de définition.
2) Considérons la fonction $f: (x,y) \longmapsto f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^p y^q}{x^2-xy+y^2} \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Pour quelles valeurs de p et q cette fonction est elle continue.
3) En déduire que si p+q=2 alors f n'est pas différentiable en (0,0).
4) Pour quelles valeurs de p+q, f est elle différentiable en (0,0).

Exercice 03 : Etudier l'existence et la continuité des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction f définie par $f(x,y) = \begin{cases} y^2 sin\frac{x}{y} si\ y \neq 0 \\ 0\ si\ non \end{cases}$

Exercice 04 : Trouver toutes les fonctions de classe C^1 sur le plan vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2f(x,y) = 0$$

Exercice 05 : Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}^2$dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

1) $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (en utilisant le changement de variables u=x+y et v=x+2y)
2) $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$ sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 tel\ que\ x > 0\}$ (en passant aux coordonnées polaires)
3) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} - 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ En effectuant le changement de variable : $\begin{cases} u = x^2 - y \\ v = x^2 + y \end{cases}$

Exercice 06 : Ecrire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage du point (2,1) de la fonction y^x. Calculer approximativement $(0.95)^{2.01}$

Exercice 07 : Etudier les extrema locaux :

1) $f: (x, y) \in]-\pi/4\,, 5\pi/4[\times]-\pi/4\,, 5\pi/4[\mapsto cosx\ siny + sin^2 x.$
2) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$
3) $f(x, y) = 7xy + 4(x^3 - y^3) + x - y, sur\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x\}$
4) $f(x, y) = xy + yz + zx + {x^4}/{2}$

Exercice 08 : Un agriculteur cherche à fabriquer un abreuvoir en forme de parallélépipède rectangle ayant une capacité d'un mètre cube, mais revenant le moins cher possible i.e : ayant une surface totale minimale. Notre homme soucieux du confort de ses bêtes exige quand même que les côtés de l'abreuvoir fassent au moins un mètre et que la hauteur soit comprise entre 20 et 65 centimètres. Sachant que l'abreuvoir a un fond, quatre côtés mais pas de couvercle :

1. Exprimer ce projet en un problème d'extremum libre d'une fonction de deux variables sur un compact du plan.
2. Résoudre ce problème, puis déterminer les trois dimensions de l'abreuvoir.

<u>Exercice supplémentaire :</u> (concours d'accès aux grandes écoles, session 2012)

1. Soit φ une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \varphi(x + y^2)$ vérifie
   $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ 2y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$
2. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$**.** On définit une fonction $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ En posant $F(u, v) = f(u - v^2, v)$.Exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial u}\ et\ \frac{\partial F}{\partial v}$ de F à l'aide des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}\ et\ \frac{\partial f}{\partial y}$ de f.
3. Soit $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, si\ (x, y) \neq (0,0) \\ \quad 0 \quad\ si\ (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) La fonction f est elle continue en (0,0) ?
   b) La dérivée directionnelle $f_{\vec{v}(0,0)}$existe elle pour tout vecteur $\vec{v} = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?. En déduire que f n'est pas différentiable en (0,0).
   c) Calculer les dérivées partielles premières de f en (0,0).
   d) Montrer, en utilisant la définition de la différentiabilité d'une fonction, que f n'est pas différentiable en (0,0).