Chapitre 03 : Suites et Séries de fonctions

I. Suites de fonctions :

Soient K l'un des corps $\mathbb{R}$ ou$\mathbb{C}$ et I une partie non vide de K. Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I dans K est une application $n \mapsto f_n$ de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des fonctions de I dans K.

1. Convergence simple d'une suite de fonctions :

Définition : Une suite de fonctions$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I dans K converge simplement vers la fonction f si pour tout$x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.On note$f_n \to f$.

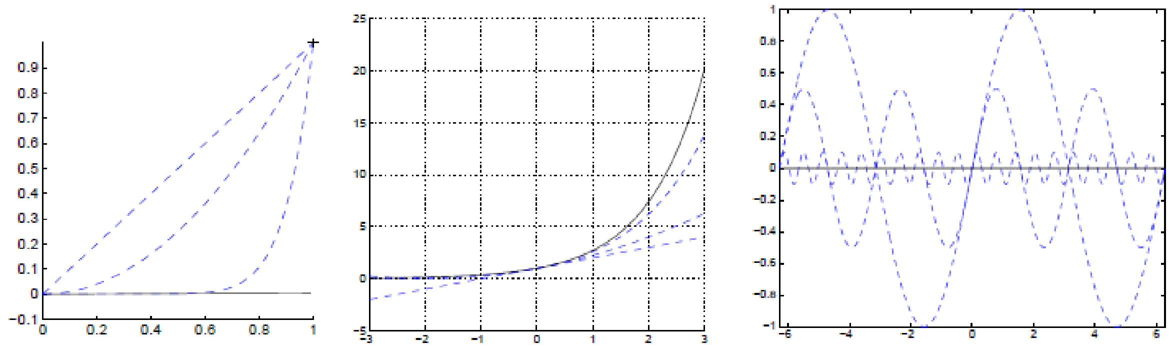
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement, alors la limite est unique.

<u>Quantification :</u> $f_n \to f$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists \eta_x \; tel\; que\; pour\; tout\; n \geq \eta_x \; on\; a\; |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Exemples :

- Soit pour tout entier n,
  $$f_n: \quad [0,1] \to \mathbb{R}$$
  $$x \mapsto x^n$$
  On a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 \; si \; x \in [0,1[\\ 1 \; si \; x = 1 \end{cases}$,
  Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x \in [0,1[\\ 1 \; si \; x = 1 \end{cases}$
- $\forall n \geq 1$, on définit :
  $$g_n: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
  $$x \mapsto (1 + \frac{x}{n})^n$$
  $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$, la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par$g(x) = e^x$.
- $\forall n \geq 1$, soit
  $$h_n: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
  $$x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n}$$
  $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} h_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = 0$, la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $h \equiv 0$ identiquement nulle.



Fonctions f_1, f_2, f_{10} et la limite f.

Remarques :

- Dans l'exemple 1, toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$ mais la fonction f ne l'est pas.
- Dans l'exemple 3, toutes les fonctions h_n sont continument dérivables sur $\mathbb{R}$, mais la suite $(h'_n)_n$ n'a pas de limite car $h'_n(x) = \cos(nx)$.
- Si on considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ telle que pour tout entier n, on a :
$$f_n: \quad [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \to n^2x^n(1-x)$$
On vérifie aisément que $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$, dont l'intégrale sur ce segment vaut 0, pourtant
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+2}\right) = 1 \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = 0$$

Ainsi la convergence simple ne conserve pas les propriétés des fonctions : continuité, intégrabilité et dérivabilité comme le montre les exemples ci-dessus. Ceci justifie la définition d'une nouvelle forme de convergence, plus difficile à vérifier, mais valide pour les passages à la limite.

2. Convergence uniforme d'une suite de fonctions :

Définition : soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions de I dans$\mathbb{R}$, et $f: I \to \mathbb{R}$ sa limite simple. On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur$I$, et on note$f_n \rightrightarrows f$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{N} \; tel\ que\ n \geq \eta \Longrightarrow \forall x \in I;\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{N} \; tel\ que\ n \geq \eta \Longrightarrow \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

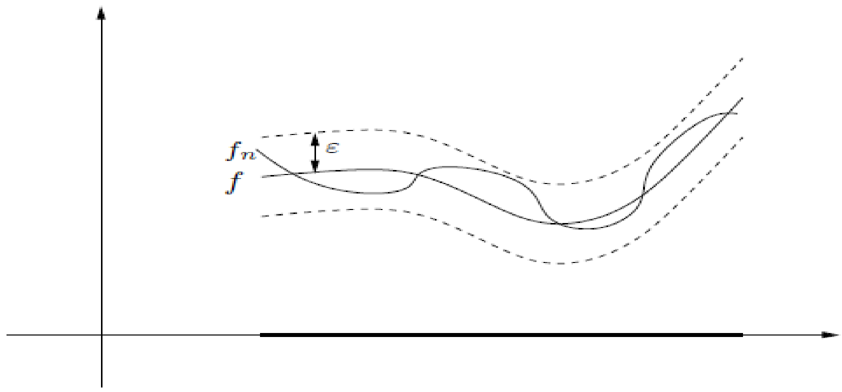
Ou encore $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{N} \; tel\ que\ n \geq \eta \Longrightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon$

Ce qui signifie$\lim_{n\to+\infty}\|f_n - f\| = 0$.

Remarque :

- Dans la convergence simple, η dépend de x, mais dans la convergence uniforme η ne dépend pas de x.
- La convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ vers f signifie qu'à partir d'un certain rang, la distance entre les fonctions f_n et la fonction f tendra vers 0. Ou bien les graphes des

fonctions f_n s'insèrent dans une bande de largeur 2ε autour du graphe de f (2ε est l'écart maximal autorisé pour la distance entre $f_n(x)$ et $f(x)$).



Exemples :

- Pour tout entier $n \geq 1$, soit

  f_n: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

  $x \mapsto xe^{-nx}$

  La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement, sur $\mathbb{R}_+$, vers la fonction nulle.

  $\forall n \geq 1, \forall x \geq 0, f_n'(x) = (1-nx)e^{-nx}$, d'où $sup_{x\geq 0}|f_n(x) - f(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{ne}$. Et donc $\lim_{n\to+\infty}\|f_n - f\| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{ne} = 0$, ce qui signifie que $f_n \rightrightarrows f \equiv 0, sur\ \mathbb{R}_+$.

- Pour tout entier n, soit

  f_n: $[0,1] \to \mathbb{R}$

  $x \mapsto x^n(1-x)$

La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement, sur $[0,1]$, vers la fonction nulle. Les fonctions $f_n'(x) = (n - nx - x)x^{n-1}, \forall x \in [0,1]$ donc $sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$$\forall n \geq 0, 0 \leq sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| \leq 1 - \frac{n}{n+1}$$

Forcément $\lim_{n\to+\infty}\|f_n - f\| = 0$.

- La suite de fonctions $(f_n)_n$ telles que

$$f_n: \quad [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^n$$

Converge simplement vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1\ si\ x = 1 \\ 0\ si\ x \in [0,1[\end{cases}$$

Donc $|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0\ si\ x = 1 \\ x^n\ si\ x \in [0,1[\end{cases} \Rightarrow sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| = 1 \nrightarrow 0$

Ce qui prouve que la suite ne converge pas uniformément vers la fonction nulle.

- La suite de fonctions $(f_n)_n$ telles que

$$f_n: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n}$$

Converge simplement vers la fonction nulle sur l'ensemble des réels. En plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{\sin(nx)}{n}\right| \le \frac{1}{n} \Longrightarrow 0 \le sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{n} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\|f_n - f\| = 0 \Longrightarrow f_n \rightrightarrows f sur \mathbb{R}$$

3. Propriétés de la convergence uniforme :

Proposition 01 : soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions de I dans$\mathbb{R}$, et : $I \to \mathbb{R}$.

Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, alors elle converge simplement vers f :

La convergence uniforme entraine la convergence simple

Proposition 02 : La somme de deux suites de fonctions uniformément convergentes est une suite de fonctions uniformément convergente.

Théorème de continuité : Soit la suite $(f_n)_n$ des fonctions continues sur$I$,

Si $f_n \rightrightarrows f sur\ I$ alors f est continue sur$I$.

Théorème d'intégration : Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions continues sur$I$, convergeant uniformément vers la fonction $f\ sur\ I$, alors :

$$pour\ tout\ compact[a, b] \subseteq I, \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Théorème de dérivation : Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions continument dérivables sur $I = [a, b]$, vérifiant les conditions :

- $\exists x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))_n$ converge.
- La suite des dérivées $(f_n')_n$ est uniformément convergente, sur$I$, vers une fonction g.

Alors : La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément, sur$I$, vers une fonction dérivable f telle que $f' \equiv g$.

II. Séries de fonctions :

Définition : Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions telles que $\forall n \ge 0, f_n: I \to \mathbb{R}$. On appelle série de fonctions de terme général f_n, notée $\sum_{n\ge0} f_n$, la suite de fonctions des sommes partielles $(S_n)_n$, où pour tout entier n on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k\ \ ou\ encore\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x);\ \forall x \in I.$

La série de fonctions $\sum_{n\ge0} f_n$ est la série numérique $\sum_{n\ge0} f_n\,(x)$ pour tout $x \in I$.

1. Convergence simple d'une série de fonctions :

Définition : Soit la série de fonctions $\sum_{n\ge0} f_n$ telle que $\forall n \ge 0, f_n: I \to \mathbb{R}$.

- Si pour tout $x \in D \subseteq I$, la série numérique $\sum_{n\ge0} f_n\,(x)$ converge, on dit que la série de fonctions $\sum_{n\ge0} f_n$ converge simplement sur D.

- D est dit le <u>domaine de convergence</u> de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$.
- Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge sur I, on définit la fonction $f: I \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,, \forall x \in I$$

  f est <u>la somme</u> de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$.
- On définit <u>le reste</u> de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$, noté (R_n), par

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\,, \forall x \in I$$

Exemples :

❖ Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ telle que $\forall n \geq 0, f_n(x) = x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{k+1}}{1 - x} \; si\ x \neq 1 \\ (n+1) si\ x = 1 \end{cases}$$

Donc $\sum_{n\geq 0} x^n$ est une série géométrique qui converge si et seulement si $|x| < 1$. D'où $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge simplement sur l'intervalle $]-1,1[$, vers la fonction $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

❖ Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ où

$$\forall n \geq 0, \quad \begin{array}{rl} f_n : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \dfrac{x^n}{n!} \end{array}$$

On a $\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout réel x, d'après le critère de D'Alembert de convergence absolue.

❖ La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ où

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{array}{rl} f_n : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{x^2 + n^2}} \end{array}$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^2}}$ est une série alternée convergente pour tout réel x, car la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}}\right)_n$ est positive décroissante vers 0 quand n tend vers l'infinie.

Remarque : Etudier la convergence simple d'une série de fonctions revient à fixer $x \in I$, et étudier la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$.

2. Convergence uniforme d'une série de fonctions :

Définition : Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ telle que $\forall n \geq 0, f_n : I \to \mathbb{R}$.

On dit que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément vers une fonction f sur I si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément vers f sur I.

i.e. ssi $S_n \rightrightarrows f$ sur I

i.e. ssi $\lim_{n\to+\infty}(sup_{x\in I}|S_n(x) - f(x)|) = 0$

i.e. ssi $\lim_{n\to+\infty}(sup_{x\in I}|R_n(x)|) = 0\ ou\ encore\ R_n \rightrightarrows 0$ sur I

D'où : une série de fonctions converge uniformément sur I si et seulement si son reste converge uniformément vers 0 sur$I$.

Exemples :

- Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ telle que $\forall n \geq 1,$ $\begin{array}{ll} f_n: & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ & x \to \frac{(-1)^n}{x+n} \end{array}$

  $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ est une série alternée convergente pour toute valeur positive x, car la suite $\left(\frac{1}{x+n}\right)_{n\geq 1}$ est positive décroissante vers 0. Donc cette série des fonctions converge simplement sur$\mathbb{R}^+$.

  Pour montrer qu'elle converge uniformément sur$\mathbb{R}^+$, il faut et il suffit de montrer que son reste converge uniformément vers 0 :

  Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ est une série alternée convergente, alors

  $$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}\right| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{x+n+1}$$

  D'où $\forall x \geq 0, |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \Longrightarrow 0 \leq sup_{x\geq 0}|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$

  Ce qui prouve que $\lim_{n\to+\infty}(sup_{x\geq 0}|R_n(x)|) = 0\ i.e\ R_n \rightrightarrows 0\ sur\ \mathbb{R}^+$.

Proposition 01 : Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur$I$, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

$$\sum_{n\geq 1} f_n \text{ converge uniformément sur } I \Longrightarrow (f_n \rightrightarrows 0\ sur\ I)$$

Remarque: La convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$vers la fonction nulle est une condition nécessaire non suffisante pour la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$. Donc si $(f_n)_n ne\ converge\ pas\ uniformément\ vers\ 0\ sur\ I\ alors\ la\ série \sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I .

Exemple : Considérons la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ telle que $\forall n \geq 1, \begin{cases} f_n: & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ & x \to nx^2e^{-x\sqrt{n}} \end{cases}$

La série $\sum_{n\geq 1} nx^2e^{-x\sqrt{n}}$ est à termes positifs pour toute valeur réelle de x, on applique le critère de Riemann :

$\lim_{n\to+\infty} n^2 f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} n^2\, nx^2e^{-x\sqrt{n}} = 0, \forall x \geq 0.$

Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} nx^2e^{-x\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

Vérifions que cette série de fonctions ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$; pour cela on montre que la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle :

On a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} nx^2e^{-x\sqrt{n}} = 0, \forall x \geq 0$, ce qui signifie que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$. Les fonctions $f_n'(x) = nx\left(2 - x\sqrt{n}\right)e^{-x\sqrt{n}}, \forall x \geq 0$, donc

$sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)| = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{e^2} \nrightarrow 0$. D'où ne converge pas uniformément vers la fonction nulle, et par conséquence la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur l'ensemble des réels positifs.

Proposition 02 :

- Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément vers f sur$I$, alors elle converge simplement vers f sur$I$.
- Si les séries de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ et $\sum_{n\geq 0} g_n$ convergent uniformément vers les fonctions $f\ et\ g$ sur$I$, alors pour toute valeur réelleα, la série $\sum_{n\geq 0}(f_n + \alpha g_n)$ converge uniformément vers $(f + \alpha g)$ sur$I$.

Théorème d'Abel de convergence uniforme : La série $\sum_{n\geq 0} f_n(x) g_n(x)$ converge uniformément sur I, si

- $\exists M > 0\ tq\ \forall n \geq 0, |\sum_{k=0}^{n} f_k(x)| \leq M, \forall x \in I$
- La suite de fonctions $(g_n(x))_n$ positive, décroissante et $g_n \rightrightarrows 0$ sur I.

3. La convergence normale d'une série de fonctions :

Définition : Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ définie sur un domaine D (i.e. la série converge simplement sur D). S'il existe une série numérique positive convergente $\sum_{n\geq 0} a_n$ vérifiant :

$$\forall x \in D, |f_n(x)| \leq a_n$$

Alors on dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur D.

Autrement dit, la série converge normalement sur D si :

$$\exists a_n \geq 0, \forall n \geq 0, \forall x \in D, |f_n(x)| \leq a_n\ et \sum_{n\geq 0} a_n\ converge$$

i.e. $\exists a_n \geq 0, \forall n \geq 0, sup_{x\in D}|f_n(x)| \leq a_n\ et \sum_{n\geq 0} a_n\ converge$

i.e. $\sum_{n\geq 0}\|f_n\|$ converge.

Exemple :

- Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}, x \in \mathbb{R}$
  On a $\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
- Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} ne^{-x\sqrt{n}}, x \in [1, +\infty[$.
  On a $f_n(x) = ne^{-x\sqrt{n}}$, et $f_n'^{(x)} = -n\sqrt{n}e^{-x\sqrt{n}} \leq 0, \forall x \in [1, +\infty[$.
  Donc $sup_{x\in[1,+\infty[}|f_n(x)| = f_n(1) = ne^{-\sqrt{n}}$, et la série $\sum_{n\geq 0} ne^{-\sqrt{n}}$ converge d'après le critère de Riemann, car $\lim_{n\to+\infty} n^2 ne^{-\sqrt{n}} = 0$. D'où la série de fonctions$\sum_{n\geq 0} ne^{-x\sqrt{n}}$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.

Remarques :

- La convergence normale entraine la convergence absolue, en effet :

  La série converge normalement sur D si :

$$\exists a_n \geq 0, \forall n \geq 0, \forall x \in D, |f_n(x)| \leq a_n \; et \sum_{n\geq 0} a_n \; converge$$

Donc, et d'après le critère de comparaison, la série $\sum_{n\geq 0}|f_n(x)|$ converge ce qui signifie que la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge absolument sur D.

- La convergence normale entraine la convergence uniforme, en effet :

  La série converge normalement sur D si :

$$\exists a_n \geq 0, \forall n \geq 0, \forall x \in D, |f_n(x)| \leq a_n \; et \sum_{n\geq 0} a_n \; converge$$

  Ce qui implique $|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n$, comme $\sum_{n\geq 0} a_n \; converge$ son reste tendra vers 0 (indépendamment de x), d'où

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty}(sup_{x\in D}|R_n(x)|) \leq \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n = 0$$

  i.e. $R_n \rightrightarrows 0$ sur D$\Longrightarrow \sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur D.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} La\ convergence\ normale & \Longrightarrow & La\ convergence\ uniforme \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ La\ convergence\ absolue & \Longrightarrow & La\ convergence\ simple \end{array}}$$

Exemples :

- On a déjà démontré que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément sur$\mathbb{R}^+$, mais$\left|\frac{(-1)^n}{x+n}\right| = \frac{1}{x+n} \sim \frac{1}{n}$ $\forall x \geq 0$, comme la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge, donc la série$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{x+n}$ ne converge pas absolument sur$\mathbb{R}^+$.

  D'autre part, $sup_{x\geq 0}\left|\frac{(-1)^n}{x+n}\right| = \frac{1}{n} \; et \; \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge, donc la série$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{x+n}$ ne converge pas normalement sur$\mathbb{R}^+$.

  Ainsi la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément, mais pas normalement, ni absolument sur$\mathbb{R}^+$.
- Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{x^2n^2+n} \; avec \; x \in \,]0,1]$.

  On a $\left|\frac{(-1)^n}{x^2n^2+n}\right| = \frac{1}{x^2n^2+n} \leq \frac{1}{x^2n^2}$ $\forall x \in \,]0,1]$

  Or $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{x^2n^2}$ converge (série de Riemann), donc la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{x^2n^2+n}$ converge absolument sur$]0,1]$.

  Etudions sa convergence uniforme : $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{x^2n^2+n}$ est une série alternée convergente sur$]0,1]$, alors son reste est majoré par

$\forall x \in]0,1], |R_n(x)| \leq f_{n+1}(x) = \frac{1}{x^2(n+1)^2+n+1} \Rightarrow \forall x \in]0,1], |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$

$$D'où\ \ 0 \leq sup_{x\in]0,1]}|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

i.e. $R_n \rightrightarrows 0\ sur]0,1]$, la série est donc uniformément convergente $sur]0,1]$.

Mais: $sup_{]0,1]}\frac{1}{x^2n^2+n} = \frac{1}{n}$, ce qui signifie que la série ne converge pas normalement, bien qu'elle est absolument et uniformément convergente.

Récapitulatif des différentes techniques pour démontrer la convergence uniforme :

- ✓ Déterminer le domaine de convergence simple , puis montrer que la suite de fonctions des restes $(R_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur ce domaine.
- ✓ Montrer la convergence normale, en

$$\begin{cases} trouvant\ a_n \geq 0\ tel\ que\ |f_n(x)| \leq a_n, pour\ tout\ x\ et\ \sum_{n\geq 0} a_n\ converge \\ ou\ bien, en\ calculant\ sup_{x\in D}|f_n(x)| = b_n\ et\ \sum_{n\geq 0} b_n\ converge \end{cases}$$

- ✓ Appliquer le théorème d'Abel de convergence uniforme.

4. Théorème généraux sur les séries de fonctions :

Théorème de continuité : Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ est une série de fonctions continues sur$I$, convergeant uniformément sur$I$, alors sa somme est une fonction continue sur$I$.

i.e. $\forall x_0 \in I;\ \lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0)$

Exemple : Soit la série de fonctions$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{x^2+n^2}$, pour tout entier$n \geq 1$, les fonctions $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$ sont continues sur l'ensemble des réels.

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| = \frac{1}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Comme $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est une série convergente, alors $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{x^2+n^2}$ converge normalement et donc uniformément sur$\mathbb{R}$.

D'après le théorème de continuité, la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+n^2} = 0$.

Théorème d'intégration : Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions continues sur$I$, convergeant uniformément sur$I$, alors

$$pour\ tout\ compact[a,b] \subseteq I, \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Exemple : Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} x^n\ \ avec\ |x| \leq r < 1$

On a$|x|^n \leq r^n, \forall x \in [-r,r], avec\ r < 1$. Ceci signifie que la série $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge normalement donc uniformément sur$[-r,r]$.

En plus, les fonctions $f_n(x) = x^n$ sont continues sur$[-r, r]$, d'où et d'après le théorème d'intégration, on a

$$\forall x \in [-r, r], 0 < r < 1, \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \; dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n \, dt$$

Donc $\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Longrightarrow -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \forall x \in [-r, r], 0 < r < 1$

Théorème de dérivation : Soit $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ une série de fonctions continument dérivables sur$[a, b]$ Si :

- $\exists x_0 \in [a, b] \; tq \; \sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ converge ; et
- $\sum_{n\geq 0} f_n'(x)$ converge uniformément sur$[a, b]$et a pour somme la fonction g
  Alors la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge uniformément sur [a,b], et sa somme f est dérivable avec $f' \equiv g \; ie \; (\sum_{n\geq 0} f_n(x))' = \sum_{n\geq 0} f_n'(x)$.

Exemple : Soit la série de fonctions$\sum_{n\geq 1} ne^{-nx}$, $x \in [1, +\infty[$.

$$\forall x \geq 1, ne^{-nx} \leq ne^{-n} \; et \; \sum_{n\geq 1} ne^{-n} \; converge \; car \; \lim_{n\to+\infty} n^2 \, ne^{-n} = 0$$

Donc$\sum_{n\geq 1} ne^{-nx}$ converge normalement sur$[1, +\infty[$. D'autre part, les fonctions $f_n(x) = e^{-nx}$ sont continument dérivables sur$[1, +\infty[$ et la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} e^{-nx}$ converge d'après le critère de Riemann ($\lim_{n\to+\infty} n^2 \, e^{-xn} = 0$). D'où

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-nx})' = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}\right)' = \left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)'$$

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx} = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$