Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques de TLEMCEN
Département de Mathématiques TD n°1 Algèbre 1 1ère année-2014-2015
Série de TD n°2 Relation d'équivalence et Relation d'ordre.
Mr; MESSIRDI.B

Exercice 01: On définit dans $\mathbb{R}$ la relation R par: $x\ R\ y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$. Montrer que R est une relation d'équivalence et déterminer la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}$.

Preuve: **(1)** Montrons que R est une relation d'équivalence.

a) R **est-elle réflexive?**

R est réflexive$\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \ \ S\ x.$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Rightarrow x^2 - x^2 = x - x = 0 \Rightarrow xRx \Rightarrow R \text{ est réflexive}$$

b) R **est-elle symétrique?**
R est symétrique$\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad$ Si $x \ \ R\ y$ alors $y\ R\ x$?

$$\begin{aligned} \forall x, y \quad &\in \quad \mathbb{R}, \qquad \text{Si } x\ Ry \Rightarrow x^2 - y^2 = x - y \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad y^2 - x^2 = y - x \Rightarrow yRx \Rightarrow R \text{ est symétrique.} \end{aligned}$$

c) R **est-elle transitive?**
R est transitive$\Leftrightarrow$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, Si xRy et yRz alors xRz.

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \quad &\in \quad \mathbb{R}, \text{Si } xRy \Rightarrow x^2 - y^2 = x - y \text{ et si} \\ yRz \quad &\Rightarrow \quad y^2 - z^2 = y - z \end{aligned}$$

La somme des deux équations donne:

$$x^2 - z^2 = x - z \Rightarrow \ xRz \Rightarrow R \text{ est transitive.}$$

Conclusion: puisque R est réflexive, symétrique et transitive alors c'est une relation d'équivalence.

2) Déterminer la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}$.

$cl\,(a) = \{x \in \mathbb{R}/xRa\}$
$xRa \Leftrightarrow x^2 - a^2 = x - a \Leftrightarrow (x-a)(x+a) = (x-a)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a \\ \text{ou } \ (x+a) = 1 \text{ après une simplification de } \ (x-a) \\ \Rightarrow x = 1 - a \end{cases}$$

$\Rightarrow cl\,(a) = \{a, 1-a\}$.

Exercice 02: soit S la relation dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$a\ S\ b \ \Leftrightarrow a^3 - b^3 = a - b$$

(1) Montrer que S est une relation d'équivalence.

(2) Discuter suivant la valeur de m le nombre d'éléments contenus dans la classe de m .

Preuve: soit S la relation dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$aSb \Leftrightarrow a^3 - b^3 = a - b$$

(1) Montrons que S est une relation d'équivalence.

a) S **est-elle réflexive?**

S est réflexive$\Leftrightarrow$ $\forall a \in \mathbb{R}, \quad a \ \ S \ a.$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \Rightarrow a^3 - a^3 = a - a = 0 \Rightarrow a \ Sa \Rightarrow S \text{ est réflexive}$$

b) S **est-elle symétrique?**

S est symétrique$\Leftrightarrow$ $\forall (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad$ Si $a \ \ S \ b$ alors $b \ S \ a.$

$$\begin{aligned}\forall (a,b) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad a \ Sb \Rightarrow a^3 - b^3 = a - b \Rightarrow \\ &\Rightarrow b^3 - a^3 = b - a \Rightarrow b \ Sa \Rightarrow S \text{ est symétrique.}\end{aligned}$$

c) S **est-elle transitive?**

S est transitive$\Leftrightarrow$ $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,Si aSb et bSc alors $a \ Sc.$

$$\begin{aligned}\forall (a,b,c) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ \text{Si } a \ Sb &\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \Rightarrow a^3 - b^3 = a - b \\ \text{et } bSc &\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \Rightarrow b^3 - c^3 = b - c \\ &\Rightarrow a^3 - c^3 = a - c \Rightarrow a \ Sc \Rightarrow S \text{ est transitive}\end{aligned}$$

2) Discuter suivant la valeur de m le nombre d'éléments contenus dans la classe de m .

$cl \ (m) = \{a \in \mathbb{R} / \ mSa\}$
$mSa \Leftrightarrow \quad m^3 - a^3 = m - a$
$\Rightarrow \ (m-a) \ (m^2 + am + a^2) = (m-a)$
$\Rightarrow \ (a-m) \ (a^2 + ma + m^2) = (a-m)$

1. $\Rightarrow \begin{cases} a = m \\ \text{ou } a^2 + ma + m^2 = 1 \Rightarrow a^2 + ma + m^2 - 1 = 0 \end{cases}$

conclusion: pour $\triangle = m^2 - 4(m^2 - 1)$
$= 4 - 3m^2 = \left(2 - \sqrt{3}m\right) \quad \left(2 + \sqrt{3}m\right)$

1/ Si $\triangle = 0 \Rightarrow m = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ou $m = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ alors on a deux éléments dans la classe de m.

2/ Si $\triangle < 0 \Rightarrow m \in \left]-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right[\cup \left]\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ alors on a un élément unique dans la classe de m.

3/ Si $\triangle > 0 \Rightarrow m \in \left]-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right[$ alors on a 3 éléments dans la classe de m.

Exercice 03: Dans $p(E)$, ensemble des parties de $E \neq \varnothing$, R est définie par:

$$A \ R \ B \Leftrightarrow \left(A = B \text{ ou } A = C_E^B\right)$$

(1) Montrer que R est une relation d'équivalence.

(2) Déterminer $cl\ (\varnothing)$,en déduire $cl\ (E)$.

(3) A-t-on $cl\ (A \cap B) = cl\ (A) \cap cl\ (B)$ pour A, B dans $p(E)$?justifier.

Preuve: Dans $p(E)$, ensemble des parties de $E \neq \varnothing$, R est définie par:

$$A\ R\ B \Leftrightarrow \left(A = B \text{ ou } A = C_E^B\right)$$

(1) Montrer que R est une relation d'équivalence.

$\Re$ est réflexive$\Leftrightarrow$ $\forall A \in p(E)\,,\quad A\ \ \Re\ A.$

$$\text{on a: } A = A \Rightarrow A\ \Re A \Rightarrow \Re \text{ est réflexive}$$

b) $\Re$ est-elle symétrique?

$\Re$ est symétrique$\Leftrightarrow$ $\forall A, B \in p(E), \qquad A\ \Re\ B \Rightarrow B\ \Re\ A$?

$$\begin{aligned} \text{soient } A, B &\in p(E)\,, \qquad A\ \Re B \Rightarrow \left(A = B \text{ ou } A = C_E^B\right) \\ &\Rightarrow \left(B = A \text{ ou } B = C_E^A\right) \Rightarrow B \Re A \\ &\Rightarrow \Re \text{ est symétrique .} \end{aligned}$$

c) $\Re$ est-elle transitive?

$\Re$ est transitive$\Leftrightarrow$

$$\forall A, B, C \in p(E)\,, \qquad A\ \Re B \text{ et } B \Re C \Rightarrow\ A\ \Re C.$$

$$\begin{aligned} \forall A, B, C &\in p(E)\,, \qquad A\ \Re B \text{ et } B \Re C \Rightarrow \left(A = B \text{ ou } A = C_E^B\right) \\ &\quad \text{et } \left(B = C \text{ou } B = C_E^C\right) \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = B \ \text{ et } B = C \Rightarrow A = C \\ A = B \ \text{ et} B = C_E^C \Rightarrow A = C_E^C \\ A = C_E^B \ \text{ et } B = C \Rightarrow A = C_E^C \\ A = C_E^B \ \text{et} B = C_E^C \Rightarrow A = C \end{array} \right. \Rightarrow \left(A = C \text{ ou } A = C_E^C\right) \\ &\Rightarrow A\ \Re C. \end{aligned}$$

Conclusion : $\Re$ est une relation d'équivalence dans $p(E)$.

(2) Déterminer $cl\ (\varnothing)$,en déduire $cl\ (E)$.

$$\begin{aligned} cl(\varnothing) &= \{A \in p(E) / A \Re \varnothing\} \\ A \Re \varnothing &\Leftrightarrow \left(A = \varnothing \text{ ou } A = C_E^{\varnothing}\right) \Rightarrow A = \varnothing \text{ ou } A = E \\ cl(\varnothing) &= \{\varnothing, E\} \text{ et puisque } E \in cl(\varnothing) \Rightarrow cl(E) = \{\varnothing, E\} \end{aligned}$$

(3) A-t-on $cl\ (A \cap B) = cl\ (A) \cap cl\ (B)$ pour A, B dans $p(E)$?justifier.

non car pour: $A = \varnothing$ et $B = \{1\}$ on a: $cl\ (A \cap B) = cl(\varnothing) = \{\varnothing, E\}$

mais $cl\ (A) \cap cl\ (B) = cl(\varnothing) \cap cl(\{1\}) \neq \{\varnothing, E\}$ car $\{1\} \notin \{\varnothing, E\}$

donc: $cl\ (A \cap B) \neq cl\ (A) \cap cl\ (B)$.

Exercice 04:

1) Soit $\Re$ la relation d'équivalence définie dans $\mathbb{N}$ par:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2, x \; \Re \; y \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x + y = 7)$$

Déterminer, en discutant suivant les valeurs de l'entier naturel a, $cl\,(a)$.

$cl\ (a) = \{x \in \mathbb{N}/x\Re a\}$
$x\Re a \Leftrightarrow (x = a \text{ ou } x + a = 7 \Rightarrow x = 7 - a)$
Dans le $2^{ème} cas (x = 7 - a$ il faut que $x \in \mathbb{N})$
$\Rightarrow cl\,(a) = \begin{cases} \{a, 7-a\} & \text{si } a \leq 7 \\ \{a\} & \text{si } a > 7 \end{cases}.$

2) Dans $\mathbb{Z}^*$ on définit la relation $\Im$ par:

$$a \quad \Im \;\; b \Leftrightarrow a \text{ divise } b \text{ ou } b \text{ divise } a.$$

caractériser l'ensemble quotient $\mathbb{Z}^*/\Im$ **s'il existe**?

La relation n'est pas transitive car: $2 \;\; \Im \;\; 10$ et $10 \;\; \Im \;\; 5$ mais 2 n'est pas en relation avec 5.
Alors la relation n'est plus une relation d'équivalence ce qui donne que l'ensemble quotient n'existe pas.

Exercice 05: Soit Φ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par:

$$x \quad \Phi \quad y \Leftrightarrow \; \exists \, n \; \in \mathbb{N} \text{ tel que : } y^{\,n} = \; x \; .$$

(1) Montrer que Φ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^*$.

(2) Cet ordre est-il total ?

(3) Soit l'ensemble $A = \{2, \; 3, \; 5\}$. Déterminer s'ils existent, max A et min A pour l'ordre Φ.

Preuve: Soit Φ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par:

$$x \quad \Phi \quad y \Leftrightarrow \; \exists \, n \; \in \mathbb{N} \text{ tel que : } y^{\,n} = \; x \; .$$

(1) Montrer que Φ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^*$.

a) Φ est-elle réflexive?

Φ est réflexive$\Leftrightarrow \;\; \forall x \in \mathbb{N}^*, \;\; x \; \Phi \; x$?

$$\forall x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists \; n = 1 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x^{\,1} = x \Rightarrow x \; \Phi \; x \Rightarrow \Phi \text{ est réflexive}$$

b) Φ est-elle antisymétrique?

Φ est antisymétrique$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{N}^*, \quad x \ \Phi \ y \quad$ et $y \ \Phi \ x \Rightarrow \ x = y$?

$$\begin{aligned} \text{soient } x, y \ \mathbb{N}^*, \ \text{ si } x\Phi y \ \text{ et } y\Phi x \ &\Rightarrow \ \exists \ n_1 \ \in \mathbb{N} \text{ tel que : } y^{\ n_1} = \ x \\ \text{et } \exists \ n_2 \ &\in \ \mathbb{N} \text{ tel que : } x^{n_2} = \ y \ \Rightarrow (\ x^{n_2})^{n_1} = y^{\ n_1} = x \\ &\Rightarrow \ n_1 n_2 = 1 \Rightarrow n_1 = n_2 = 1 \\ &\Rightarrow \ x = y \Rightarrow \Phi \text{ est antisymétrique.} \end{aligned}$$

c) Φ est-elle transitive?
Φest transitive$\Leftrightarrow \ \forall x, y, z \in \mathbb{N}^*, x \ \Phi \ y$ et $y \ \Phi \ z \Rightarrow x \ \Phi \ z$.

$$\begin{aligned} \text{soient } x, y, z \ &\in \ \mathbb{N}^*, \\ x\Phi y \text{ et } y\Phi z \ &\Rightarrow \ \exists \ n_1 \ \in \mathbb{N} \text{ tel que : } y^{\ n_1} = x \\ \text{et } \exists \ n_2 \ &\in \ \mathbb{N} \text{ tel que : } z^{\ n_2} = y \Rightarrow (z^{\ n_2})^{n_1} = x \\ \exists n \ &= \ n_1 n_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } z^{\ n} = x \\ &\Rightarrow \ x \ \Phi \ z \ \Rightarrow \Phi \text{ est transitive} \end{aligned}$$

(2) Cet ordre est-il total ?

L'ordre n'est pas total car pour les deux entiers $\{2, 3\}$ on a ni $2 \ \Phi 3$ ni $3 \ \Phi \ 2$.

(3) Soit l'ensemble $B = \{2, \ 3, \ 5\}$. Déterminer s'ils existent, $Max \ B$ et $Min \ B$ pour l'ordre Φ.

M est un majorant de $B \Leftrightarrow \forall x \in B, x \ \Phi \ M \Rightarrow \begin{cases} 2 \ \Phi M \Rightarrow \exists \ n_1 \ \in \mathbb{N} \text{ tel que : } M^{\ n_1} = \ 2 \Rightarrow M = 2 \\ 3 \ \Phi M \Rightarrow \exists \ n_2 \ \in \mathbb{N} \text{ tel que : } M^{\ n_2} = 3 \ \Rightarrow M = 3 \\ 5 \ \Phi M \Rightarrow \exists \ n_3 \ \in \mathbb{N} \text{ tel que : } M^{\ n_3} = \ 5 \Rightarrow M = 5 \end{cases}$
Alorsl'ensemble des majorants est vide.
$\Rightarrow SupB$ n'existe pas donc $\max B$ n'existe pas.
et on a m est un minorant de $B \Leftrightarrow \forall x \in B, m \ \Phi \ x$
$\Rightarrow \begin{cases} m \ \Phi 2 \Rightarrow \exists \ n_1 \ \in \mathbb{N} \text{ tel que : } 2^{\ n_1} = \ m \Rightarrow m = 1, 2, 4, ... \\ m \ \Phi 3 \Rightarrow \exists \ n_2 \ \in \mathbb{N} \text{ tel que : } 3^{\ n_2} = m \Rightarrow m = 1, 3, 9, ... \\ m \ \Phi 5 \Rightarrow \exists \ n_3 \ \in \mathbb{N} \text{ tel que : } 5^{\ n_3} = \ m \Rightarrow m = 1, 5, 25, ... \\ \Rightarrow m = 1 (\text{ l'intersection entre les trois cas}) \end{cases}$
$\Rightarrow InfB = 1 \notin B \Rightarrow Min \ B$ n'existe pas.

Exercice 06: Dans un ensemble non vide E, on définit une relation binaire $\Re_1$ transitive et telle que: $\forall \in E, \ \overline{x\Re_1 x}$, c'est-à-dire aucun élément de E n'est en relation avec lui-même par la relation $\Re_1$.

Montrer que la relation $\Re_2$ définie par: $\forall (x, y) \in E^2, x \ \Re_2 \ y \Leftrightarrow (x \ \Re_1 \ y$ ou $x = y)$ est **une relation d'ordre**.
Preuve:
$\Re_2$ est-elle réflexive? Montrons que: $\forall x \in E^2, x\Re_2 x$?
On a: $x = x \Rightarrow (x \ \Re_1 \ x$ ou $x = y) \Leftrightarrow x\Re_2 x$.
$\Re_2$ est-elle antisymétrique? Montrons que:. $\forall (x, y) \in E^2, x \ \Re_2 \ y$ et $y\Re_2 \ x \Rightarrow x = y$

$$\begin{cases} x\Re_2 y \Leftrightarrow (x\ \Re_1\ y \text{ ou } x=y) \\ \text{et} \\ y\Re_2 x \Leftrightarrow (y\ \Re_1\ x \text{ ou } y=x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\ \Re_1\ y \text{ et } y\ \Re_1\ x\ \Rightarrow x\ \Re_1\ x \text{ car } \Re_1 \text{ est transitive (contradiction avec l'hypothèse)} \\ \text{ou } x\ \Re_1\ y \text{ et } y=x \\ \text{ou } x=y \text{ et } y\ \Re_1\ x \\ \text{ou } x=y \text{ et } y=x \end{cases} \Rightarrow$$

$x=y$

$\Re_2$ est-elle transitive? Montrons que:$\forall (x,y,z)\in E^3, x\ \Re_2\ y$ et $y\Re_2\ z \Rightarrow x\Re_2\ z$.

$$\begin{cases} x\Re_2 y \Leftrightarrow (x\ \Re_1\ y \text{ ou } x=y) \\ \text{et} \\ y\Re_2 z \Leftrightarrow (y\ \Re_1\ z \text{ ou } y=z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\ \Re_1\ y \text{ et } y\ \Re_1\ z\ \Rightarrow x\ \Re_1\ z \text{ car } \Re_1 \text{ est transitive} \\ \text{ou } x\ \Re_1\ y \text{ et } y=z \Rightarrow x\ \Re_1\ z \\ \text{ou } x=y \text{ et } y\ \Re_1\ z \Rightarrow x\ \Re_1\ z \\ \text{ou } x=y \text{ et } y=z \Rightarrow x=z \end{cases}$$

$\Rightarrow x\ \Re_1\ z$ ou $x=z \Rightarrow x\Re_2\ z$.

Conclusion: $\Re_2$ est une relation d'ordre.

Exercice 07: Soit dans $\mathbb{R}^2$ la relation définie par:

$$(x,y)\leq(x',y')\Leftrightarrow(x<x')\ \text{ ou }\ (x=x'\ \text{ et }\ y\leq y').$$

(1) L'ordre est-il total ? Justifer.

(2) Soit $A=\{(-1,1),(2,-1)\}$,Déterminer, s'ils existent, $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, et $\min A$.

Preuve:

1) L'ordre est total car: $\forall (x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$, on a:

$$\begin{array}{rcl} (x<x') & \Rightarrow & (x,y)\leq(x',y') \\ \text{ou }\ (x'<x) & \Rightarrow & (x',y')\leq(x,y) \\ \text{ou }\ (x=x'\ \text{ et }\ y\leq y') & \Rightarrow & (x,y)\leq(x',y') \\ \text{ou }\ (x=x'\ \text{ et } y'\ \leq y) & \Rightarrow & (x',y')\leq(x,y) \end{array}$$

2) Puisque l'ordre est total alors cha que ensemble est ordonné d'où: $(-1,1)\leq(2,-1)$.
Alors: $\sup A=\max A=(2,-1)$ et $\inf A=\min A=(-1,1)$.

Exercice 08: Soit dans $\mathbb{R}^2$ la relation définie par:

$$(x,y)\leq(x',y')\Leftrightarrow x\leq x'\ \text{ et }\ y\leq y'.$$

(1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?

(2) Préciser deux minorants, deux majorants, bornes inférieure et supérieure de la partie:

$$A\ =\{(1,2),\ (3,1)\}.$$

(3) La partie A possède-t-elle un plus grand élément ? un plus petit élément ?.

Preuve: Soit dans $\mathbb{R}^2$ la relation définie par:

$$(x,y) \leq (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

(1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?

a) $\leq$ est-elle réflexive?

$\leq$ est réflexive$\Leftrightarrow$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \leq (x,y)$?

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x \leq x \text{ et } y \leq y \Rightarrow (x,y) \leq (x,y) \Rightarrow \ \leq \text{ est réflexive}$$

b) $\leq$ est-elle antisymétrique?

$\leq$ est antisymétrique$\Leftrightarrow$ $\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \leq (x',y')$ et $(x',y') \leq (x,y)$
$\Rightarrow (x,y) = (x',y')$?

$$\begin{array}{rcl} \text{soient } (x,y), (x',y') & \in & \mathbb{R}^2, \text{ si } (x,y) \leq (x',y') \Rightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y' \\ \text{et si } (x',y') \, R \, (x,y) & \Rightarrow & x' \leq x \text{ et } y' \leq y \Rightarrow x = x' \text{ et } y = y' \\ & \Rightarrow & (x,y) = (x',y') \Rightarrow \leq \text{ est antisymétrique.} \end{array}$$

c) $\leq$ est-elle transitive?

$\leq$ est transitive$\Leftrightarrow$ $\forall (x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{R}^2, (x,y) \leq (x',y')$ et $(x',y') \leq (x'',y'')$
$\Rightarrow (x,y) \leq (x'',y'')$.

$$\begin{array}{rcl} \text{soient } (x,y), (x',y'), (x'',y'') & \in & \mathbb{R}^2, \\ (x,y) & \leq & (x',y') \Rightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y' \\ \text{et } (x',y') & \leq & (x'',y'') \Rightarrow x' \leq x'' \text{ et } y' \leq y'' \\ & \Rightarrow & x \leq x'' \text{ et } y \leq y'' \\ & \Rightarrow & (x,y) \leq (x'',y'') \Rightarrow \leq \text{ est transitive} \end{array}$$

conclusion: $\leq$ est une relation d'ordre qui est partiel car pour les deux couples:
$(2,3)$ et $(4,1)$ on a ni $(2,3) \leq (4,1)$ ni $(4,1) \leq (2,3)$.

(2) Préciser deux minorants, deux majorants, bornes inférieure et supérieure de la partie:

$$A = \{(1,2),\ (3,1)\}.$$

(M_1, M_2) est un majorant de $A \Rightarrow \forall (x,y) \in A, (x,y) \leq (M_1, M_2)$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1,2) \leq (M_1,M_2) \Rightarrow 1 \leq M_1 \text{ et } 2 \leq M_2 \\ (3,1) \leq (M_1,M_2) \ \Rightarrow 3 \leq M_1 \text{ et } 1 \leq M_2 \\ \Rightarrow (M_1,M_2) \in \mathbb{R} \text{ avec } 3 \leq M_1 \text{ et } 2 \leq M_2 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow SupA = (3,2) \notin A \Rightarrow MaxA$ n'existe pas.
(m_1, m_2) est un minorant de $A \Rightarrow \forall (x,y) \in A,\ (m_1,m_2) \leq (x,y)$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (m_1,m_2) \leq (1,2) \Rightarrow m_1 \leq 1 \text{ et } m_2 \leq 2 \\ (m_1,m_2) \leq \ (3,1) \ \Rightarrow m_1 \leq 3 \text{ et } m_2 \leq 1 \\ \Rightarrow (m_1,m_2) \in \mathbb{R} \text{ avec } m_1 \leq 1 \text{ et } m_2 \leq 1 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow InfA = (1,1) \notin A \Rightarrow MinA$ n'existe pas.

TDn°3 " Les applications" 1ère année Algèbre 1-2014-2015

Exercice 01: Soit E un ensemble. Pour toute partie X de E, on note φ_X l'application caractéristique de E dans $\{0,1\}$ définie par:

$$\forall t \in E, \varphi_X(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } t \in X \\ 0 & \text{si } t \notin X \end{array} \right.$$

Soit A et B deux sous ensembles de E tels que $A \cap B \neq \emptyset$ et $A \cup B \neq E$.

(1) Montrer que: $\forall A, B \in P(E)$, $\varphi_{A\cap B} = \varphi_A . \varphi_B$.

(2) Montrer que: $\varphi_{\bar{A}} = 1 - \varphi_A$.

(3) En déduire que: $\varphi_{A\cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A . \varphi_B$ puis que: $\varphi_{A\setminus B} = \varphi_A - \varphi_A \cdot \varphi_B$.

Preuve: Soit E un ensemble. Pour toute partie X de E, on note φ_X l'application caractéristique de E dans $\{0,1\}$ définie par:

$$\forall t \in E, \varphi_X(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } t \in X \\ 0 & \text{si } t \notin X \end{array} \right.$$

Soit A et B deux sous ensembles de E tels que $A \cap B \neq \emptyset$ et $A \cup B \neq E$.

(1) Montrer que: $\forall A, B \in P(E)$, $\varphi_{A\cap B} = \varphi_A . \varphi_B$.

$\varphi_{A\cap B} : E \to \{0,1\}$ et $\varphi_A . \varphi_B : E \to \{0,1\}$ de plus:

$$\varphi_{A\cap B}(t) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \quad \text{si } t \in A \cap B \\ 0 \quad \text{si } t \notin A \cap B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} t \in A \text{ et } t \notin B \\ \text{ou} \\ t \notin A \text{ et } t \notin B \\ \text{ou} \\ t \notin A \text{ et } t \in B \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\text{et } \varphi_A . \varphi_B(t) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \times 1 = 1 \quad \text{si } t \in A \cap B \\ 0 \quad \text{si } t \notin A \cap B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} t \in A \text{ et } t \notin B \\ \text{ou} \\ t \notin A \text{ et } t \notin B \\ \text{ou} \\ t \notin A \text{ et } t \in B \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \varphi_{A\cap B} = \varphi_A . \varphi_B$.

(2) Montrer que: $\varphi_{\bar{A}} = 1 - \varphi_A$.

$\varphi_{\bar{A}} : E \to \{0,1\}$ et$1 - \varphi_A : E \to \{0,1\}$ de plus:

$$\varphi_{\bar{A}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \bar{A} \\ 0 & \text{si } t \notin \bar{A} \end{cases} \text{ et } 1 - \varphi_A(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in A \\ 1 & \text{si } t \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \bar{A} \\ 0 & \text{si } t \notin \bar{A} \end{cases} \Rightarrow \varphi_{\bar{A}} = 1 - \varphi_A .$$

(3) En déduire que:$\varphi_{A\cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A .\varphi_B$ puis que:$\varphi_{A\setminus B} = \varphi_A - \varphi_A \cdot \varphi_B$.

$\varphi_{A\cup B} = 1 - \varphi_{C_E^{A\cup B}} = 1 - \varphi_{C_E^A \cap C_E^B} = 1 - \varphi_{C_E^A} \times \varphi_{C_E^B}$
$= 1 - (1 - \varphi_A) \times (1 - \varphi_B) = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A .\varphi_B$.
$\varphi_{A\setminus B} = \varphi_{\bar{B}\cap A} = \varphi_{\bar{B}} \times \varphi_A = (1 - \varphi_B) \times \varphi_A = \varphi_A - \varphi_A \cdot \varphi_B$.

e 02: EF2013-2014 On définit dans E la relation $\Re$ par:

$$\forall A, B \in E, A \Re B \Leftrightarrow \exists f : A \to B \text{ une fonction } \textbf{bijective}.$$

Cette relation est-elle une relation d'**équivalence**?

Preuve:

1) $\Re$ est **reflexive** car il suffit de prendre l'application identité de A vers A alors:

$\exists f = id : A \to A$ une fonction **bijective**$\Leftrightarrow \forall A \in E, A \Re A$.

2) $\Re$ est **symétrique** car si $A \Re B \Leftrightarrow \exists f : A \to B$ une fonction **bijective**.

$\Rightarrow \exists f^{-1} : B \to A$ une fonction **bijective**$\Rightarrow B \Re A$.

3) $\Re$ est **transitive** car si $A \Re B \Leftrightarrow \exists f : A \to B$ une fonction **bijective**

et si $B \Re C \Leftrightarrow \exists g : B \to C$ une fonction bijective .
$\Rightarrow \exists h = g \circ f : A \to C$ une fonction **bijective car** si f injective$\Rightarrow g \circ f$ injective
et si g surjective alors $g \circ f$ injective donc $g \circ f$ bijective $\Rightarrow A \Re C$.

Exercice 03: Soit

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \\ x & \mapsto & f(x) = \dfrac{1}{x^2+2} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{c} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) = 3x - 1 \end{array}$$

(1) f est-elle injective? surjective? Justifier.

(2) Montrer que g est- bijective. Déterminer g^{-1}.

(3) A-ton $f \circ g = g \circ f$? Justifier.

Preuve:

(1) f est-elle injective? surjective? Justifier.

f n'est pas injective car: $-1 \neq 1$ et $f(-1) = f(1)$
et elle n'est pas surjective car: pour $y = -2; \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq -2$.

(2) Montrons que g est- bijective. Déterminer g^{-1}.

$g'(x) = 3 > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante d'où l'injectivité de f.
$y = 3x - 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{3} \Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}; \exists x \in \mathbb{R}$ tel que: $g(x) = y$. $\Rightarrow g$ est surjective.

(3) A-ton $f \circ g = g \circ f$? Justifier.

$f \circ g\ (x) = f\ (g(x)) = f(3x-1) = \frac{1}{(3x-1)^2+2}$ et $g \circ f\ (x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x^2+2}\right) = \frac{3}{x^2+2} - 1$
$\Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$

Exercice 04: Montrer que f de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ définie par:

$$f\ (x) = \frac{x}{1+|x|} \text{ est bijective et déterminer sa réciproque.}$$

Preuve:

a) f est elle injective?
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, si $f\ (x_1) = f\ (x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$?
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, si $f\ (x_1) = f\ (x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{1+|x_1|} = \frac{x_2}{1+|x_2|}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_2} \text{ si } x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \text{ si } x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \leq 0 \\ \text{ne convient pas que dans le cas où } x_1, x_2 \text{ ont le même signe} \\ \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1+x_2} \text{ si } x_1 \leq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \\ \text{ne convient pas que dans le cas où } x_1, x_2 \text{ ont le même signe} \\ \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \text{ si } x_1 \leq 0 \text{ et } x_2 \leq 0 x_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ est injective.}$$

b) f est elle surjective?
Montrons que: $\forall y \in]-1,1[, \exists x \in \mathbb{R}$ tel que: $f\ (x) = y$
· Si $y \in]-1,0[\Rightarrow x < 0 \Rightarrow \frac{x}{1-x} = y \Rightarrow x = \frac{y}{1+y} < 0$ qui existe si: $y \in]-1,0[$
· Si $y \in [0,1[\Rightarrow x > 0 \Rightarrow \frac{x}{1+x} = y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} < 0$ qui existe si: $y \in [0,1[$
conclusion: f est une application bijective avec:

$$\begin{aligned} f^{-1} &:]-1,1[\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \begin{cases} \frac{y}{1-y} \text{ si } y \in [0,1[\\ \frac{y}{1+y} \text{ si } y \in]-1,0[\end{cases} \end{aligned}.$$

e 05: EF 2013-2014 Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par: $h\ (x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

(1) h est elle bijective? Justifier.

(2) Si oui trouver h^{-1}, si non trouver les plus grands ensembles A et B tels que:

$$\begin{aligned} g &: A \to B \\ x &\mapsto g\ (x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

soit bijective et trouver g^{-1}.

(3) L'application $f\ : \mathbb{Z} \to \mathbb{N};\ x \mapsto |x| - [x]$ est-elle injective, surjective, bijective ?

Preuve: Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par: $h\ (x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

(1) h est elle bijective? Justifier.

a) h est elle injective?
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, si $h\ (x_1) = h\ (x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$?
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, si $h\ (x_1) = h\ (x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+1}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+1}}$
$\Rightarrow x_1$ et x_2 **ont le même signe** $\Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2+1} = \frac{x_2^2}{x_2^2+1} \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$
$\Rightarrow f$ est injective.
b) h est elle surjective?
Montrons que: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ tel que: $f\ (x) = y$
$f\ (x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = y$ (x et y ont le même signe)$\Rightarrow (x^2+1)\,.y^2 = x^2$
$\Leftrightarrow x^2\,(1-y^2) = y^2$
$\Rightarrow y \neq \pm 1$ et $y \in \left]-1, 1\right[$ pour garder les signe
donc si $y \in \left]-1, 1\right[\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{y^2}{1-y^2}}$
Conclusion: pour $y \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$ le x n'existe pas donc h n'est pas surjective.
d'où h n'est plus bijective.

(2) g est une application bijective:

$$\begin{array}{ccl} g & : & \mathbb{R} \to \left]-1,1\right[\\ x & \mapsto & g\ (x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}$$

avec:

$$\begin{array}{ccl} g^{-1} & : & \left]-1,1\right[\to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g^{-1}\ (x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{y^2}{1-y^2}} \text{ si } y \geq 0 \\ -\sqrt{\frac{y^2}{1-y^2}} \text{ si } y < 0. \end{cases} \end{array}$$

(3) L'application $f\ : \mathbb{Z} \to \mathbb{N};\ x \mapsto |x| - [x]$ est-elle injective, surjective, bijective ?

L'application $f\ : \mathbb{Z} \to \mathbb{N};\ x \mapsto |x| - [x]$ n'est pas injective car: $2 \neq 3$ et $f\ (2) = f\ (3) = 0$.
L'application $f\ : \mathbb{Z} \to \mathbb{N};\ x \mapsto |x| - [x]$ n'est pas surjective car:
$f\ (x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x > 0 \\ -2x \text{ si } x < 0 \text{ (donc une image qui est paire)} \end{cases}$
ce qui donne que: $\forall y = 2k+1 \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Z}, f\ (x) \neq y$.
conclusion: f est ni injective ni surjective donc n'est pas bijective.

Exercice 06: Soient a, b, c et d des réels non nuls donnés, et soit f définie comme suit:

$$\begin{array}{ccl} f & : & A \to B \\ x & \mapsto & f\ (x) = \dfrac{ax+c}{bx+d}. \end{array}$$

1) Comment doit-on choisir A pour que f soit une application?

2) Comment doit-on choisir a, b, c et d pour que f soit une application injective?

3) Comment doit-on choisir a, b, c, d et B pour que f soit une application surjective?

4) Comment doit-on choisir a, b, c, d, A et B pour que f soit une application bijective?

Solution:

1) f est une application si $\forall x \in A, \exists y \in B$ tel que $y = f\ (x)$

On remarque que $f\ (x)$ existe pour tout $x \neq -\frac{d}{b} \Rightarrow A = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{b}\right\}.$

2) f est injective $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, f\ (x) = f\ (y) \Rightarrow x = y$

$f\ (x) = f\ (y) \Rightarrow \frac{ax+c}{bx+d} = \frac{ay+c}{by+d} \Rightarrow (ax + c)(by + d) = (bx + d)(ay + c)$
$\Rightarrow abxy + adx + cby + cd = abxy + bcx + day + cd$
$\Rightarrow adx + cby = bcx + day$
$\Rightarrow (ad - bc)\, x = (ad - bc)\, y$
Donc pour que $x = y$ il suffit $(ad - bc) \neq 0$
Conclusion: pour que f est injective il faut que: $(ad - bc) \neq 0$.

3) f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A$ tel que: $f\ (x) = y$

$f\ (x) = y \Leftrightarrow \frac{ax+c}{bx+d} = y \Leftrightarrow ax + c = (bx + d)\, y \Leftrightarrow x = \frac{dy-c}{a-by}$ qui existe si $y \neq \frac{a}{b}$
f est surjective $\Leftrightarrow y \neq \frac{a}{b} \Leftrightarrow B = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{b}\right\}.$

4) f soit une application bijective $\Leftrightarrow f$ est une application injective et surjective donc

$A = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{b}\right\}, (ad - bc) \neq 0$ et $B = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{b}\right\}.$

07: (EF 2012-2013)

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Montrer que:

1) $\forall B \subset F, f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B).$

2) f est **surjective** $\Leftrightarrow \forall B \subset F, f\ (f^{-1}(B)) = B.$

Preuve:

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Montrer que:

1) $\forall B \subset F, f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B).$

Soit $B \subset F, f^{-1}(F \setminus B) = \{x \in E / \exists y \in F \setminus B$ tel que: $f\ (x) = y\}$
$= \{x \in E / y \notin B$ tel que: $f\ (x) = y\}$
$= \{x \in E / x \notin f^{-1}(B)\} = E \setminus f^{-1}(B).$

2) f est **surjective** $\Leftrightarrow \forall B \subset F, f\ (f^{-1}(B)) = B.$

"$\Rightarrow$ "hyp: f est **surjective ; pb:** $\forall B\subset F, f\left(f^{-1}(B)\right)=B.$
D'après la question 2) $\forall B\subset F, f\left(f^{-1}(B)\right)=B\cap f(E)$
et puisque f est surjective alors $f(E)=F.$
$\Rightarrow \forall B\subset F, f\left(f^{-1}(B)\right)=B\cap F=B$ car: $B\subset F.$
"$\Leftarrow$ " hyp: $\forall B\subset F, f\left(f^{-1}(B)\right)=B.$ **; pb:** f est **surjective**
Montrons que $\forall y\in F, \exists x\in E$ tel que $f(x)=y$
Soit $y\in F\Rightarrow y\in B\cap f(E)\Rightarrow y\in f\left(f^{-1}(B)\right)$
$\Rightarrow \exists x\in f^{-1}(B)\subset E$ tel que $f(x)=y.$
$\Rightarrow f$ est **surjective.**

Exercice 08 : $0f:E\rightarrow F$ une application, $X\subseteq E$ et $Y\subseteq E.$

(1) **a)** Montrer que: $f(X\cap Y)\subset f(X)\cap f(Y)$.
b) Donner un exemple pour lequel $f(X\cap Y)\neq f(X)\cap f(Y).$

c) Montrer que si f est injective alors: $f(X\cap Y)=f(X)\cap f(Y).$

(2) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) f est injective.
2) $X\cap Y=\emptyset\Rightarrow f(X)\cap f(Y)=\emptyset.$
3) $Y\subset X\Rightarrow f(X-Y)=f(X)-f(Y).$

(3) Montrer que: f est injective **si et selement si** $\forall A\subset E, f^{-1}(f(A))=A.$

" $\Rightarrow$ " Montrons que: $\forall A\subset E, f^{-1}(f(A))\subset A.$
Soit $x\in f^{-1}(f(A))\Rightarrow \exists y\in f(A)$ tel que $f(x)=y$
$\Rightarrow \exists x_1\in A$ tel que $f(x_1)=y$ et $f(x)=y$
$\Rightarrow x=x_1$ car f est injective
$\Rightarrow x\in A.$
" $\supset$ " Soit $x\in A\Rightarrow \exists y=f(x)\in f(A)$
$\Rightarrow x\in f^{-1}(f(A)).$
" $\Leftarrow$ " Montrons que f est injective.
Soient $x_1,x_2\in E$, si $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f\{x_1\}=f\{x_2\}$
$\Rightarrow f^{-1}(f\{x_1\})=f^{-1}(f\{x_2\})\Rightarrow\{x_1\}=\{x_2\}\Rightarrow x_1=x_2.$
d'où f est injevtive.

Solution:

(1) **a)** Montrons que: $f(X\cap Y)\subset f(X)\cap f(Y)$.

Soit $y\in$ $f(X\cap Y)\Rightarrow \exists x\in$ $X\cap Y$ tel que: $f(x)=y$
$\Rightarrow$ $\exists x\in$ X et $\exists x\in Y$ tel que: $f(x)=y$
$\Rightarrow$ ($\exists x\in$ X tel que: $f(x)=y$) et ($\exists x\in Y$ tel que: $f(x)=y$)
$\Rightarrow y\in f(X)$ et $y\in f(Y)$ $\Rightarrow y\in$ $f(X)\cap f(Y).$
b) Donner un exemple pour lequel $f(X)\cap f(Y)\subset f(X\cap Y).$
On pose: $X=\{0,1\}$ et $Y=\{0,-1\}$ avec: $f(x)=|x|.$

$f\ (X) = \{0,1\}$ et $f\ (Y) = \{0,1\} \Rightarrow f\ (X) \cap f\ (Y) = \{0,1\}$
et $X \cap Y = \{0\} \Rightarrow f\ (X \cap Y) = \{0\}$
conclusion: $f\ (A) \cap f\ (B) \subset f\ (A \cap B)$.
c) Montrer que si f est injective alors: $f\ (X \cap Y) = f\ (X) \cap f\ (Y)$.
Il suffit de montrer que: $f\ (X) \cap f\ (Y) \subset f\ (X \cap Y)$
$y \in\ f\ (X) \cap f\ (Y) \Rightarrow y \in f\ (X)$ et $y \in f\ (Y)$
$\Rightarrow$ ($\exists x_1 \in\ X$ tel que: $f\ (x_1) = y$) et ($\exists x_2 \in Y$ tel que: $f\ (x_2) = y$)
et puisque f est injective alors: $x_1 = x_2 = x$
$\Rightarrow \exists x \in\ X$ et $\exists x \in Y$ tel que: $f\ (x) = y$
$\Rightarrow \exists x \in\ X \cap Y$ tel que: $f\ (x) = y \Rightarrow y \in\ f\ (X \cap Y)$.

(2) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

$$\textbf{1)}\quad f \text{ est injective.}$$
$$\textbf{2)}\quad X \cap Y = \emptyset \Rightarrow f\ (X) \cap f\ (Y) = \emptyset.$$
$$\textbf{3)}\quad Y \subset X \Rightarrow f\ (X - Y) = f\ (X) - f\ (Y).$$

Montrons que: **1) $\Rightarrow$2) et 2)$\Rightarrow$3) et 3)$\Rightarrow$1)**

a) Montrons que: [f est injective] $\Rightarrow [X \cap Y = \emptyset \Rightarrow f\ (X) \cap f\ (Y) = \emptyset]$

Montrons par l'absurde que $[X \cap Y = \emptyset \Rightarrow f\ (X) \cap f\ (Y) = \emptyset]$
Si $f\ (X) \cap f\ (Y) \neq \emptyset \Rightarrow \exists \beta \in f\ (X) \cap f\ (Y) \Rightarrow \exists \beta \in f\ (X)$ et $\exists \beta \in f\ (Y)$
$\Rightarrow \exists x \in X$ tel que: $f\ (x) = \beta$ et $\exists y \in Y$ tel que: $f\ (y) = \beta \Rightarrow f\ (x) = f\ (y)$
$\Rightarrow x = y$ car f est injective
$\Rightarrow x \in X \cap Y \Rightarrow X \cap Y \neq \emptyset$.

b) Montrons que: $[X \cap Y = \emptyset \Rightarrow f\ (X) \cap f\ (Y) = \emptyset]$

$\Rightarrow [Y \subset X \Rightarrow f\ (X - Y) = f\ (X) - f\ (Y)]$
Montrons que: $[Y \subset X \Rightarrow f\ (X - Y) = f\ (X) - f\ (Y)]$
1er cas: Si $Y = X$ alors: $f\ (X - Y) = f\ (\emptyset) = \emptyset = f\ (X) - f\ (Y) = f\ (X) - f\ (X)$
2ème cas: Si $Y = \emptyset$ alors: $f\ (X - Y) = f\ (X - \emptyset) = f\ (X) - f\ (Y) = f\ (X) - f\ (\emptyset)$
3ème cas: Si $Y \subset X$ avec $Y \neq \emptyset$ et $Y \neq X$
Montrons que: $f\ (X - Y) \subset f\ (X) - f\ (Y)$
Soit $\beta \in f\ (X - Y)$ car $Y \subset X \Rightarrow \exists \alpha \in (X - Y)$car $Y \subset X$
tel que: $f\ (\alpha) = \beta \Rightarrow \exists \alpha \in X$ et $\alpha \notin Y$ tel que: $f\ (\alpha) = \beta$
$\Rightarrow \beta \in f\ (X)$ et on a: $(X - Y) \cap Y = \emptyset$
$\Rightarrow f\ (X - Y) \cap f\ (Y) = \emptyset$ d'après l'hypothèse
$\Rightarrow \beta \notin f\ (Y)$ car $\beta \in f\ (X - Y) \Rightarrow \beta \in f\ (X) - f\ (Y)$.
Montrons que: $f\ (X) - f\ (Y) \subset f\ (X - Y)$
Soit $\beta \in f\ (X) - f\ (Y) \Rightarrow \beta \in f\ (X)$ et $\beta \notin f\ (Y) \Rightarrow \exists \alpha \in X$
tel que: $f\ (\alpha) = \beta$ et $\forall \lambda \in Y\ \ f\ (\lambda) \neq \beta$
$\Rightarrow \alpha \neq \lambda$ pour tout $\lambda \in Y$ tel que: $f\ (\alpha) = \beta$
$\Rightarrow \alpha \in (X - Y)$ tel que: $f\ (\alpha) = \beta \Rightarrow \beta \in f\ (X - Y)$.

c) Montrons que: $[Y \subset X \Rightarrow f\ (X - Y) = f\ (X) - f\ (Y)] \Rightarrow f$ est injective

On suppose que f n'est pas injective alors $\exists x \neq y$ et $f(x) = f(y)$
On a: $Y = \{x\}, X = \{x, y\}$ donc $Y \subset X$
mais $f(X - Y) = f(\{y\})$ et $f(X) - f(Y)$
$= f(\{x\}) - f(\{x, y\}) = f(\{x\}) - f(\{x\})$ car: $f(x) = f(y)$
$\Rightarrow f(X) - f(Y) = \emptyset \Rightarrow f(X - Y) \neq f(X) - f(Y)$
contradiction avec l'hypothèse.

(3) Montrer que: f est injective **si et selement si** $\forall A \subset E, f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 09: Partie A SUJET D'EXAMEN D'ACCES AUX GRANDES ECOLES 2011.

Soit E un ensemble non vide et f une application de $E \to E$. Pour toute partie A non vide de E, on pose: $B = A \cap f\left(\bar{A}\right)$ où:
$\bar{A}$ est le complémentaire de A dans E.
i) On suppose que f est injective.
a) Montrer que f ne possède pas de point fixe dans B (un élément X est un point fixe de f si $f(x) = x$).
b) Montrer que si $A \subset f(A)$ alors $B = \emptyset$.
ii) On donne $E = \mathbb{Z}$.
a) On suppose $f(n) = 2n, \forall n \in \mathbb{Z}$ et que $A = \operatorname{Im} f$. Déterminer B.
b) On suppose $f(n) = 2n + 1, \forall n \in \mathbb{Z}$ et que $A = 2\mathbb{Z}$. Déterminer B.

Solution:

Soit E un ensemble non vide et f une application de $E \to E$. Pour toute partie A non vide de E, on pose: $B = A \cap f\left(\bar{A}\right)$ où:
$\bar{A}$ est le complémentaire de A dans E.
i) On suppose que f est injective.
a) Montrons que f ne possède pas de point fixe dans B (un élément x est un point fixe de f si $f(x) = x$).
Supposons par l'absurde que f possède un point fixe dans $B \Rightarrow \exists \alpha \in B$ tel que: $f(\alpha) = \alpha$
$\Rightarrow \alpha \in A$ et $\alpha \in f\left(\bar{A}\right) \Rightarrow \alpha \in A$ et $\exists x \in \bar{A} /\ f(x) = \alpha \Rightarrow x = \alpha$ car f est injective
$\Rightarrow \alpha \in A$ et $\alpha \in \bar{A}$ d'où la contradiction.
b) Montrer que si $A \subset f(A)$ alors $B = \emptyset$.
Par contraposé si $B \neq \emptyset \Rightarrow \exists \alpha \in B \Rightarrow \alpha \in A$
et $\alpha \in f\left(\bar{A}\right) \Rightarrow \alpha \in A$ et $\exists x \in \bar{A} /\ f(x) = \alpha$
$\Rightarrow \alpha \in A$ et $\exists x \notin A /\ f(x) = \alpha \Rightarrow \alpha \in A$ et $\alpha \notin f(A)$ car f est injective
$\Rightarrow A \not\subset f(A)$.
ii) On donne $E = \mathbb{Z}$.
a) On suppose $f(n) = 2n, \forall n \in \mathbb{Z}$ et que $A = \operatorname{Im} f$. Déterminer B.
$A = 2\mathbb{Z} \Rightarrow \bar{A} = 2\mathbb{Z} + 1 \Rightarrow f\left(\bar{A}\right) = 4\mathbb{Z} + 2 \Rightarrow B = 4\mathbb{Z} + 2$.
b) On suppose $f(n) = 2n + 1, \forall n \in \mathbb{Z}$ et que $A = 2\mathbb{Z}$. Déterminer B.
$A = 2\mathbb{Z} \Rightarrow \bar{A} = 2\mathbb{Z} + 1 \Rightarrow f\left(\bar{A}\right) = 4\mathbb{Z} + 3 \Rightarrow B = \emptyset$.

Exercice 10 : Soient A et $B \in P(E)$ et $f : P(E) \to P(A) \times P(B)$ définie par:

$$f(X) = (X \cap A,\ X \cap B).$$

(1) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

(2) Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

(3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective.Déterminer f^{-1}.

Preuve:: Soient A et $B \in P(E)$ et $f : P(E) \rightarrow P(A) \times P(B)$ définie par:

$$f(X) = (X \cap A,\ X \cap B).$$

(1) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

"$\Rightarrow$ "hyp: f est injective
Pb: $A \cup B = E$
"$\subset$ " evident car A et $B \in P(E)$.
"$\supset$ "Par l'absurde supposons que E n'est pas inclu dans $A \cup B$
alors: $\exists x \in E$ et $x \notin A \cup B$
$\Rightarrow \exists x \in E$ et $x \notin A$ et $x \notin B \Rightarrow \{x\} \cap A = \{x\} \cap B = \emptyset \Rightarrow f(\{x\})$
$= (\{x\} \cap A,\ \{x\} \cap B) = (\emptyset, \emptyset) = f(\emptyset)$ avec $\emptyset \neq \{x\}$
$\Rightarrow f$ n'est pas injective (contradiction), ce qui implique que: $A \cup B = E$.
" $\Leftarrow$ "hyp: $A \cup B = E$
Pb: f est injective
Soient $X_1, X_2 \in P(E)$ avec $f(X_1) = f(X_2)$
$\Rightarrow (X_1 \cap A,\ X_1 \cap B) = (X_2 \cap A,\ X_2 \cap B) \Rightarrow X_1 \cap A = X_2 \cap A$
et $X_1 \cap B = X_2 \cap B$
$\Rightarrow (X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) = (X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B)$
$\Rightarrow X_1 \cap (A \cup B) = X_2 \cap (A \cup B)$ (la distributivité)
$\Rightarrow X_1 \cap (E) = X_2 \cap (E) \Rightarrow X_1 = X_2 \Rightarrow f$ est injective.

(2) Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

"$\Rightarrow$ "hyp: f est surjective
Pb: $A \cap B = \emptyset$
"$\supset$ " evident car l'ensemble vide est inclu dans chaque ensemble.
"$\subset$ "Par l'absurde supposons que $A \cap B$ n'est pas inclu dans $\emptyset$
alors: $\exists x \in A \cap B \Rightarrow \{x\} \cap A = \{x\} = \{x\} \cap B$
Mais $(\{x\}, \emptyset) \in P(A) \times P(B)$ alors $\forall Y \in P(E)$
on a: $f(Y) = (Y \cap A,\ Y \cap B) \neq (\{x\}, \emptyset)$ car $x \in B$
$\Rightarrow f$ n'est pas surjective.
" $\Leftarrow$ "hyp: $A \cap B = \emptyset$
Pb: f est surjective
Supposons que f n'est pas surjective$\Rightarrow \exists (Y_1, Y_2) \in P(A) \times P(B)$
et $(Y_1, Y_2) \neq f(X), \forall X \in P(E)$
$\Rightarrow (Y_1, Y_2) \neq (X \cap A,\ X \cap B), \forall X \in P(E)$
en particulier si $X = Y_1 \cup Y_2$
$\Rightarrow (Y_1, Y_2) \neq ((Y_1 \cup Y_2) \cap A,\ (Y_1 \cup Y_2) \cap B)$
mais$Y_1 \in P(A), Y_2 \in P(B)$ et $A \cap B = \emptyset$
$\Rightarrow (Y_1, Y_2) \neq (Y_1 \cap A, Y_2 \cap B) = (Y_1, Y_2)$
$\Rightarrow$contradiction$\Rightarrow f$ est surjective.

(3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective.Déterminer f^{-1}.

une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective est:
$A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = C_E^B$.
On a: $f\ (X) = (X \cap A,\ X \cap B) = (Y_1, Y_2) \in P\ (A) \times\ P\ (B)$
$\Rightarrow X \cap A = Y_1$ et $X \cap B = Y_2$ et puisque $A \cup B = E$
$\Rightarrow f^{-1}(Y_1, Y_2) = X = Y_1 \cup Y_2$.

Exercice 11: Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

(1) Montrer que: $g \circ f$ est injective $\Rightarrow$ f est injective.

(2) Montrer que: $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow$ g est surjective.

(3) f et g sont bijectives $\Rightarrow g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Solution: Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

(1) Montrer que: $g \circ f$ est injective $\Rightarrow$ f est injective.

Supposons par l'absurde que f n'est pas injective$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in E$ avec $x_1 \neq x_2$
et $f\ (x_1) = f\ (x_2) \Rightarrow g\,[f\ (x_1)] = g\,[f\ (x_2)]$
car g est une application alors $g \circ f\ (x_1) = g \circ f\ (x_2)$
$\Rightarrow g \circ f$ n'est pas injective. (contradiction)$\Rightarrow$ f est injective.

(2) Montrer que: $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow$ g est surjective.

$g \circ f$ est surjective$\Rightarrow \forall z \in G, \exists x \in E$ tel que: $g \circ f\ (x) = z$
$\Rightarrow g\,[f\,(x)] = z \Rightarrow \exists y = f\,(x) \in F$ car f est une application et $g\,(y) = z$
alors g est surjective.

(3) f et g sont bijectives $\Rightarrow g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Si f et g sont bijectives. Montrons alors que:
$g \circ f$ est injective ensuite qu'elle est surjective?
Pour injective:
Soient $x_1, x_2 \in E$ avec $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\ (x_1) \neq f\ (x_2)$ car f est injective
$\Rightarrow g\,[f\ (x_1)] \neq g\,[f\ (x_2)]$car g est injective$\Rightarrow g \circ f$ est injective .
Pour surjective:
$\forall z \in G, \exists y \in F$ tel que: $g\,(y) = z$ car g est surjective
$\Rightarrow \exists x \in E$ tel que: $g\,[f\,(x)] = z$ car f est surjective$\Rightarrow g \circ f\,(x) = z \Rightarrow g \circ f$ est surjective.
En plus si ona: $h \circ k = Id \Rightarrow k = h^{-1}$, ce qui fait pour notre exercice:
$(g \circ f)^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ Id \circ f = Id \Rightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.