E.P.S.T de Tlemcen

Département de Mathématiques

A.U 2013/2014

03/06/2014

Examen final d'Analyse2

Exercice 1

En utilisant les développements limités ,calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3}-1} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}+\frac{1}{\ln(\cos x)}\right)$$

Exercice 2

1. Soit φ une fonction continue sur $[-1,+1]$. Montrer que par le changement de variable $(x=\pi-t)$ on a $\int_0^{\pi} x\,\varphi(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\varphi(\sin x)\,dx,$

2. Calculer l'intégrale suivante $\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin x}dx,$

3. En utilisant 1., calculer $\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin x}dx.$

4. Par le changement de variable $\left(t=\frac{\pi}{2}-x,\right)$calculer$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{\sin x+\cos x},$

Exercice 3

I) Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, définie par $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$
2. f est elle differentiable sur $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Conclure!

II) Determiner les extremums de la fonction $g(x,y)=x^2y+\ln(1+y^2)$

Exercice4

Intégrer l'équation différentielle suivante:

$$y''-2y'+2y=e^x\sin(x)$$

où y est la fonction inconnue

Exercice5

Considérons la courbe paramétrée définie sur $\mathbb{R}^*$par $f(t)=\left(\frac{t^2+1}{2t},\frac{2t-1}{t^2}\right)$

Déterminer le point stationnaire et dessiner l'allure de la courbe en ce point .