E.P.S.T de Tlemcen
Département de mathématiques

20/11/2013

Devoir surveillé d'Analyse1

Question de cours:

Les assertions suivantes sont elles vraies.? Justifier votre réponse

1. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \sqrt{C_n^k} \geq \sqrt{(2^n - 1)}$
2. $E(2\sqrt{n(n+1)}) = 2n$
3. De toute suite majorée , on peut extraire une sous suite convergente.

Exercice1

Soit l'ensemble $A := \left\{ \frac{2xy}{x^2+y^2} ; x \in \mathbb{R}^* y \in \mathbb{R}^* \right\}$

1. Montrer que A admet une borne inférieure et la déterminer, est-ce un minimum ?
2. Montrer que A admet une borne supérieure et la déterminer, est-ce un maximum ?

Exercice2

1. Rappeler la définition de la partie entière $E(y)$ d'un nombre réel y.
2. Comparer $E(ny)$ et $nE(y)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y \in \mathbb{R}$.
3. Soient a, b des entiers positifs , vérifier que pour tout nombre réel x , on a:

$$b.E(\frac{x}{ab}) \leq E(\frac{x}{a}).$$

4. Endéduire l'égalité suivante:

$$E(\frac{x}{ab}) = E(\frac{1}{b}E(\frac{x}{a}))$$

Exercice3

On considère les suites $(u_n)_n$et $(v_n)_n$, définies par:

$$u_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3}$$
$$v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. Posons $l = \lim_{n \to +\infty} u_n$. trouver un intervalle d'extrémités rationnelles contenant l et de longueur inferieure à 0,0004.

... de Tlemcen
Département de mathématiques 19/11/2013

Corrigé du *devoir surveillé d'Analyse*1

Question de cours:(3pts)

1. L' assertion1 est vraie, en effet par application de la formule du binome on a:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = (1+1)^n = 2^n \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n - 1, pour\ n \geq 1$$

et

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{C_n^k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} C_n^k + \text{termes positifs} \geq 2^n - 1$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{C_n^k} \geq \sqrt{(2^n - 1)}$$

.

2. L' assertion2 est vraie, en effet :

$$4n^2 \leq \left(2\sqrt{n(n+1)}\right)^2 = 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$

.D'où

$$2n \leq 2\sqrt{n(n+1)} < 2n + 1$$

.De la définition de la partie entière ,on obtient alors:

$$E(2\sqrt{n(n+1)}) = 2n.$$

3. L' assertion 3 est fausse, en effet si l'on considère la suite définie par: $u_n = -n$ .Alors $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq 0$. C'est donc une suite majoré qui n'admet aucune sous suite convergente dans $\mathbb{R}$.

Exercice1(6pts)

$$A := \left\{\frac{2xy}{x^2+y^2}; x \in \mathbb{R}^* y \in \mathbb{R}^*\right\}$$

1. On a: $A \subset \mathbb{R}$ et $1 \in A$ (obtenu pour $x = y = 1$) donc $A \neq \emptyset$

$$(x+y)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow x^2+y^2+2xy \geq 0 \Longleftrightarrow -(x^2+y^2) \leq 2xy \Longleftrightarrow \frac{2xy}{x^2+y^2} \geq -1.$$

A est donc une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne inferieure qui est le plus grand de tous les minorants de A c.à.d $\inf A \geq -1$.Et si l'on pose $y = -x$, $\frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{-2x^2}{2x^2} = -1$, par suite $\inf A \leq -1$.Par conséquent : $\inf A = -1$. $\inf A = -1$, est un minimum de A car $-1 \in A$. $\boxed{\text{3pts}}$

2.

$$(x-y)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow x^2+y^2-2xy \geq 0 \Longleftrightarrow (x^2+y^2) \geq 2xy \Longleftrightarrow \frac{2xy}{x^2+y^2} \leq 1.$$

A est donc une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne superieure qui est le plus petit de tous les majorants de A c.à.d $supA \leq 1$.Et si l'on pose $y = x$, $\frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$, par suite $\sup A \geq 1$.Par conséquent $\sup A = 1$ sup A $= 1$, est un maximum de A car $1 \in A$. $\boxed{\text{3pts}}$

Exercice2(5pts)

1. Pour $y \in \mathbb{R}, E(y)$est le plus grand entier inferieur ou égal à y ....(1pt).
2. $\forall y \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$E(y) \leq y \Longrightarrow nE(y) \leq ny$$

et

$$E(ny)\text{est le plus grand entier} \leq ny$$

donc

$$nE(y) \leq E(ny) \qquad ((1pt))$$

3. Soient a, b des entiers positifs , pour tout nombre réel x , d'aprés 2 en prenant $n = b$ et $y = \frac{x}{ab}$on a:

$$b.E(\frac{x}{ab}) \leq E(\frac{x}{a}). \qquad ((\tfrac{1}{2}pt))$$

4. De 3. ,on a

$$E(\frac{x}{ab}) \leq \frac{1}{b}E(\frac{x}{a}) \qquad ((\tfrac{1}{2}pt))$$

$E(\frac{x}{ab})$ est un entier,qui verfie $E(\frac{x}{ab}) \leq \frac{1}{b}E(\frac{x}{a})$, donc par définition de la partie entière

$$E(\frac{x}{ab}) \leq E(\frac{1}{b}E(\frac{x}{a})) \qquad ((1pt))$$

D'autre part

$$E(\frac{x}{a}) \leq \frac{x}{a} \Longrightarrow E(\frac{1}{b}E(\frac{x}{a})) \leq E(\frac{1}{b}.\frac{x}{a}) = E(\frac{x}{ab}) \qquad ((1pt))$$

De la double inégalité , on obtient:

$$E(\frac{x}{ab}) = E(\frac{1}{b}E(\frac{x}{a}))$$

Exercice3(6pts)

Les suites $(u_n)_{n\geq 1}$et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont définies par:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+....+\frac{1}{n^3} \\ v_n &= u_n+\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

1. a) $\forall n\geq 1,\ v_n=u_n+\frac{1}{n^2}>u_n$.......................................($\frac{1}{2}pt$)

   b) la suite $(u_n)_n$est croissante car.....................................(1pt)

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^3}>0$$

,

   la suite $(v_n)_n$est décroissante car....................................(1pt)

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= u_{n+1}-u_n+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n^2}=\frac{-n^2-3n-1}{n^2(n+1)^3}<0 \end{aligned}$$

   c) $\lim_{n\to+\infty} v_n-u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ ....($\frac{1}{2}pt$) 1

   deux suites sont adjacentes , elles sont donc convergentes vers la même limite ....($\frac{1}{2}pt$)

2. $l=\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} v_n$,puisque $(u_n)_n$est croissante vers l et $(v_n)_n$est décroissante vers l , on a:

$$\forall n\geq 1, v_n=u_n+\frac{1}{n^2}>l>u_n$$

   c.à.d

$$l\in]u_n,u_n+\frac{1}{n^2}[;$$

   la longueur de cet intervalle est $\frac{1}{n^2}$ (1.5pt)

Pour trouver un intervalle d'extremités rationnelles contenant l et de longueur inferieure à 0,0004, il suffit de poser

$$\frac{1}{n^2}<0,0004=4.10^{-4}\Longleftrightarrow n>50=\sqrt{\frac{10^4}{4}}$$

.

Donc on peut prendre l'intervalle :$]u_{51},u_{51}+\frac{1}{51^2}[$ car $u_n\in\mathbb{Q}\ \forall n\geq 1$ (1pt)
