École Préparatoire en Sciences et Techniques de Tlemcen

Département de Physique

Corrigé de l'examen final - Électricité

Questions de cours :

1. Le champ électrostatique créé par une charge électrique est radial : Le champ électrostatique est porté par la droite qui relie la charge électrique et le point de mesure.
2. L'énergie potentielle électrostatique d'un ensemble discret de charges électriques $q_i, i = 1 \cdots N$ est donné par :

$$E_P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \, V_i$$

où V_i est le potentiel électrostatique créé par les charges électriques du système (sauf q_i) à l'endroit où se trouve q_i. Dans le cas de (03) protons placés aux sommets d'un triangle équilatéral de coté a, le potentiel V_i est le même pour les trois protons, et est donné par :

$$V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{e}{a} + \frac{e}{a} \right]$$

où $e = 1.6 \times 10^{-19} \, C$ est la charge du proton et a la distance entre le proton et le point de mesure de V_i. En remplaçant dans l'expression ci-dessus, on obtient

$$E_P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} e \, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{e}{a} + \frac{e}{a} \right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3 \, e^2}{a}$$

L'application numérique donne

$$E_P = 8.987 \times 10^9 \cdot \frac{(1.6)^2 \times 10^{-38}}{1 \times 10^{-10}} = 23.0 \times 10^{-19} \, \textsf{Joule}$$

3. La forme intégrale qui correspond à l'équation $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$ est obtenue en utilisant le théorème de Stokes. Pour cela, intégrons la relation précédente sur une surface S délimitée par un contour fermé C :

$$\iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{0} \cdot d\vec{S} = 0$$

Mais le théorème de Stokes permet d'écrire

$$\iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ce qui donne enfin

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

La circulation d'un champ électrostatique (et partant la force électrostatique) le long d'un contour fermé est toujours nulle.

4. Un champ électrostatique dérivant d'un potentiel V s'écrit
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$
Mais on sait que
$$dV = \vec{\nabla}V.d\vec{\ell} = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$
Sur une surface où le potentiel électrostatique est constant (équipotentielle) $dV = 0$, ce qui donne
$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$
où $d\vec{\ell}$ est un élément infinitésimal de déplacement sur la surface équipotentielle. Le produit scalaire entre $\vec{E}$ et $d\vec{\ell}$ étant nul, ces deux vecteurs sont perpendiculaires l'un à l'autre. D'autre part le champ électrostatique est tangent en tout point à une ligne de champ. Par conséquent, les lignes d'un champ électrostatique sont perpendiculaires en tout point de l'espace à une surface équipotentielle.

5. En Avril 1820, lors d'un cours sur l'électricité, Hans Christian Oersted, un physicien et chimiste danois découvrit qu'un fil transportant un courant électrique permanent était capable de faire bouger l'aiguille aimantée d'une boussole. Il conclut qu'un courant électrique circulant dans un fil pouvait créer un champ magnétique. L'importance de sa découverte réside dans le fait que pour la première fois une relation entre l'électricité et le magnétisme a été établie. Avant, la seule source connue pour produire un champ magnétique était la pierre naturellement aimantée.

6. Le champ d'induction magnétique est un pseudo-vecteur car selon la loi de Biot est savart, le champ magnétique créé par un fil conducteur parcouru par un courant continu est le résultat d'un produit vectoriel entre deux vecteurs. Par conséquent, la direction de ce dernier est décidée par la convention du tir bouchon utilisée dans la définition du produit vectoriel. Sa direction ne repose donc sur aucune base physique.

7. Considérons deux surfaces S_1 et S_2 s'appuyant sur le même contour C de telle façon à former une surface fermée $S = S_1 + S_2$. On sait que le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers une surface fermée est nul :
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$
ce qui donne
$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$
Maintenant, si au lieu de S_2 on prend une surface S_3 différente de S_2 mais qui s'appuie sur le même contour C de telle façon que $S_1 + S_3$ donne aussi une surface fermée, avec toujours
$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$
ou encore
$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S_3} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$
Ce qui nous permet de déduire que le flux à travers les deux surfaces S_2 et S_3 est le même bien que celles-ci soient de formes différentes, mais s'appuyant sur le même contour C :
$$\iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_3} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

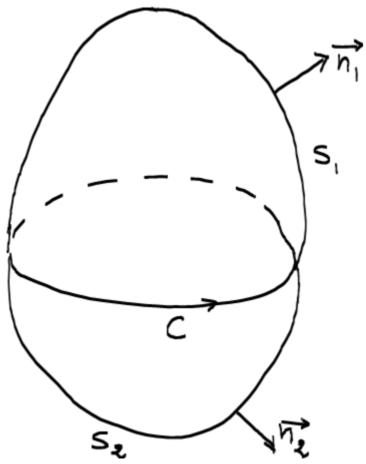

FIGURE 1 – Le flux à travers un surface fermée $S = S_1 + S_2$ est nul.

8. Le champ magnétique créé en un point à une distance r d'un fil conducteur infini parcouru par un courant continu I est donné par :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi r}\vec{u}_\theta$$

Dans le système de coordonnées cylindrique, l'élément de circulation est donné par

$$d\vec{\ell} = R\, d\theta \vec{u}_\theta$$

La circulation du champ magnétique est donnée le long d'un cercle de rayon R est donnée par

$$\oint \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi R}\vec{u}_\theta \cdot R\, d\theta \vec{u}_\theta = \mu_0 \mathrm{I}$$

La circulation du champ magnétique le long d'un cercle fermé à travers lequel passe un courant électrique continu I ne dépend pas du rayon du cercle, mais seulement du courant électrique I passant à travers. Ce résultat vérifie le théorème d'Ampère selon lequel la circulation le long d'un contour fermé d'un champ magnétique créé par des courants électriques permanents I_i est égal à μ_0 fois la somme algébrique des courants électriques traversant la surface délimitée par ce même contour, à savoir :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \mathrm{I}_{int}$$

Mais on sait que

$$\mathrm{I}_{int} = \iint \vec{\mathrm{J}} \cdot d\vec{S}$$

où $\vec{\mathrm{J}}$ est la densité du courant électrique. Ce qui donne

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint \vec{\mathrm{J}} \cdot d\vec{S}$$

En utilisant le théorème de Stokes, on peut écrire

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

où S est la surface délimitant le contour fermé C. Ce qui donne

$$\iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint \vec{\mathrm{J}} \cdot d\vec{S}$$

ou encore

$$\iint_S \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \vec{\mathrm{J}}\right) \cdot d\vec{S} = 0$$

Ceci est valable pour une surface arbitraire, ce qui permet d'écrire le théorème d'Ampère sous sa forme locale :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \vec{\mathrm{J}} = 0$$

ou encore

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{\mathrm{J}}$$

9. L'expression de la force de Lorentz $\vec{F}$ qui s'exerce sur une charge électrique ponctuelle q, se déplaçant à la vitesse $\vec{\mathrm{v}}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ est donnée par :

$$\vec{F} = q\left(\vec{\mathrm{v}} \wedge \vec{B}\right)$$

L'élément de travail de cette force le long d'un déplacement infinitésimal $d\vec{\ell}$ est donné par :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = q\left(\vec{\mathrm{v}} \wedge \vec{B}\right) \cdot d\vec{\ell}$$

En divisant et multipliant par dt, l'équation ci-dessus devient :

$$dW = q\left(\vec{\mathrm{v}} \wedge \vec{B}\right) \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt} \cdot dt$$

Mais on sait que

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

Ce qui donne

$$dW = q\left(\vec{\mathrm{v}} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{\mathrm{v}} \cdot dt$$

D'autre part, selon un résultat de l'analyse vectorielle le produit mixte

$$\left(\vec{\mathrm{v}} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{\mathrm{v}} = 0$$

Finalement, le travail de la force magnétique sur une charge en mouvement est nul.

Problème :

Une charge électrique Q de densité linéique λ est uniformément répartie sur une partie d'un fil conducteur entre les points P_1 et P_2.

1. La charge électrique Q étant répartie uniformément, son expression est donnée par

$$Q = \lambda \, |\overrightarrow{P_1P_2}|$$

avec

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = |\overrightarrow{OP_2}| - |\overrightarrow{OP_1}|$$

On voit bien sur la figure que

$$|\overrightarrow{OP_2}| = r\,\tan(\beta_2) \qquad \text{et} \qquad |\overrightarrow{OP_1}| = r\,\tan(\beta_1)$$

Ce qui donne

$$Q = \lambda\, r\,\left[\tan(\beta_2) - \tan(\beta_1)\right]$$

2. L'élément de charge électrique dq repéré par l'angle α crée au point M un champ électrostatique $\vec{E}$ de module égal à :

$$dE(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{z^2+r^2}$$

Mais on sait que

$$\tan\alpha = \frac{z}{r}$$

ou encore

$$z = r\,\tan(\alpha) \qquad \text{avec} \qquad dz = r\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

et

$$dq = \lambda dz$$

L'expression du champ électrostatique ci-dessus devient

$$dE(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dz}{z^2+r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} r \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}\frac{\lambda}{r^2\left[\tan^2(\alpha)+1\right]}$$

Mais on sait que

$$\tan^2(\alpha) + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Finalement, on obtient

$$dE(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda d\alpha}{r}$$

3. Le champ électrostatique en M a deux composantes, une suivant $\vec{u}_r$ et l'autre suivant $\vec{u}_z$. La composante suivant $\vec{u}_r$ est donnée par :

$$dE_r = dE(M)\,\cos\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha d\alpha}{r}$$

alors que celle suivant $\vec{u}_z$ est donnée par :

$$dE_z = -dE(M)\,\sin\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\alpha d\alpha}{r}$$

4. Selon le principe de superposition, le champ électrostatique créé en M par la charge Q répartie entre P_1 et P_2 est la somme des contributions de tous les éléments de charges entre ces deux points, à savoir

$$\vec{E}(M) = \left[\int_{P_1}^{P_2} dE_r\right]\vec{u}_r - \left[\int_{P_1}^{P_2} dE_z\right]\vec{u}_z$$

ou encore

$$\vec{E}(M) = \left[\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha d\alpha}{r}\right]\vec{u}_r - \left[\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\alpha d\alpha}{r}\right]\vec{u}_z$$

Après intégration, on trouve

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\left[(\sin\beta_2 - \sin\beta_1)\vec{u}_r + (\cos\beta_2 - \cos\beta_1)\vec{u}_z\right]$$

5. Pour un fil conducteur supposé infini l'angle β_1 tend vers $-\frac{\pi}{2}$ et β_2 vers $\frac{\pi}{2}$, ce qui, en remplaçant dans l'expression ci-dessus, permet d'écrire

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$$

6. Afin d'utiliser le théorème de Gauss sur le cas d'un fil conducteur infini, on doit tout d'abord remarquer que le champ électrostatique créé par ce fil en un point M est radial et a une symétrique cylindrique. En effet, pour un élément dq sur le fil créant au point M un champ électrostatique il est toujours possible de trouver un un élément de charge qui créé en M un champ électrostatique dont la somme avec celui créé par le premier élément donne un vecteur selon la coordonnée r. La symétrie du problème fait que l'intensité du champ électrostatique est le même sur la surface latérale d'un cylindre dont l'axe principal est confondu avec le fil conducteur. Il est possible de choisir comme surface de Gauss la surface d'un cylindre de rayon r et de hauteur h dont l'axe principal est suivant z (confondu avec le fil).
pour retrouver ce résultat.Selon le théorème de Gauss

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Mais la surface totale du cylindre choisie peut s'écrire sous la forme :

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2}\vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_L}\vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

où S_1, S_2 et S_L sont la surface supérieure, la surface inférieure et la surface latérale du cylindre, respectivement. Remarquons que

$$\iint_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad \text{car} \qquad \vec{E}\perp S_1$$

et

$$\iint_{S_2}\vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad \text{car} \qquad \vec{E}\perp S_2$$

alors que

$$\iint_{S_L}\vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_L} E(r)\cdot S \qquad \text{car} \qquad \vec{E}\parallel S_L$$

En plus

$$\iint_{S_L} E(r)\cdot S = E(r)\,S_L \qquad \text{car E(r) est constant sur cette surface}$$

Ce qui permet d'écrire

$$E(r)\,2\pi r\,h = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda\,h}{\varepsilon_0}$$

ou encore

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\,\pi\varepsilon_0\,r}$$

et le champ vecteur s'écrit

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\,\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\vec{u}_r$$

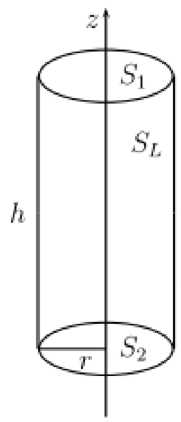

Figure 2 – Surface de Gauss sous forme d'une surface d'un cylindre de longueur h et de rayon de base r.

7. L'expression du potentiel électrostatique créé au point M par le fil conducteur supposé infini est obtenue à travers l'expression

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

ou, en utilisant l'expression du gradient dans le système de coordonnées cylindriques

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$

et puisque le champ électrostatique ne dépend que de r, l'expression ci-dessus devient

$$\frac{\lambda}{2\,\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\vec{u}_r = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r$$

par identification, on obtient

$$dV = -\frac{\lambda}{2\,\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$$

ou encore

$$V(N) - V(M) = -\frac{\lambda}{2\,\pi\varepsilon_0}\int_r^{r+a}\frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\,\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r+a}{r}\right)$$

ou encore

$$V(M) - V(N) = \frac{\lambda}{2\,\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r+a}{r}\right) > 0$$

8. L'expression du travail nécessaire pour ramener une charge q du point N vers le point M est donnée par :
$$W_{N\to M} = q(V(M) - V(N)) = \frac{q\lambda}{2\,\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r+a}{r}\right)$$