École Préparatoire en Sciences et Techniques de Tlemcen

Département de Physique

Corrigé du devoir surveillé - Physique II

Durée: 2 heures

Questions de cours :(10 points)

1. Les coordonnées cartésiennes des points A et B sont

$$A(x=1, y=0, z=1) \qquad \text{et} \qquad B(x=0, y=1, z=0) \qquad (0.5)$$

avec

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \qquad (0.25)$$

ou encore

$$\overrightarrow{AB} = -(\vec{i} + \vec{k}) + (\vec{j}) = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \qquad (0.25)$$

avec un module égal à

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3} \qquad (0.25)$$

et le vecteur unité

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) \qquad (0.25)$$

2. Nous avons

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = xy\vec{k} \qquad (0.25)$$

et

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = x\vec{i} - y\vec{j} \qquad (0.25)$$

Alors que

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) = \left(y\vec{j} \cdot (\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}) \right) = y\frac{\partial}{\partial y} \qquad (0.25)$$

et donc

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = y\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = y\frac{\partial x\vec{i}}{\partial y} = 0 \qquad (0.25)$$

car x ne dépend pas de y et le vecteur $\vec{i}$ est fixe (indépendant de y). De même

$$(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = x\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} = 0 \qquad (0.5)$$

D'autre part, on a

$$\vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) = \vec{A}(\frac{\partial y}{\partial y}) = \vec{A} = x\vec{i} \qquad (0.5)$$

Enfin

$$\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{B}(\frac{\partial x}{\partial x})y\vec{j} = y\vec{j} \qquad (0.5)$$

En sommant les quatre termes du second membre on obtient :

$$\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = x\vec{i} - y\vec{j}$$

La relation est donc vérifiée.

3. Prenons un cylindre de rayon R d'une hauteur L le long de l'axe des z (qui passe par le centre de la surface de base du cylindre) :
Remarquons que le vecteur $\vec{A}(\rho,\theta,z) = \sin\theta\vec{u}_\theta$ est tangent en tout point de la surface latérale du cylindre, ce qui signifie que le produit

$$\vec{A}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad (0.75)$$

en tout point de cette surface. De même, le vecteur $\vec{A}$ est tangent aux deux surfaces de base du cylindre en tout point de celles-ci, ce qui débouche vers un produit scalaire nul

$$\vec{A}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad (0.75)$$

La flux total à travers la surface totale fermée du cylindre est donc nul.

4. Nous avons

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1}\vec{A}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2}\vec{A}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_L}\vec{A}\cdot d\vec{S} \qquad (0.25)$$

où S_1, S_2 et S_L sont les deux surfaces de base du cylindre et la surface latérale, respectivement. En effet

$$\iint_{S_1}(\rho\vec{u}_\rho)\cdot\rho d\rho d\theta\vec{u}_z = 0 \qquad (0.25)$$

de même

$$\iint_{S_2}(\rho\vec{u}_\rho)\cdot\rho d\rho d\theta\vec{u}_z = 0 \qquad (0.25)$$

alors que

$$\iint_{S_L}\vec{A}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_L}(R\vec{u}_\rho)\cdot Rd\theta dz\vec{u}_\rho = R^2\iint_{S_L}d\theta dz = 2\pi L\,R^2 \qquad (0.5)$$

D'autre part

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 2 \qquad (0.25)$$

et

$$\iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = 2\int_0^R \rho d\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^L dz = 2\pi L\,R^2 \qquad (0.5)$$

Le théorème est donc vérifié.

5. Pour établir sa loi d'interaction entre les charges électriques Charles Augustin Coulomb a utilisé un appareil de mesure connu de son temps appelé : balance de torsion (0.5). La balance de torsion de Coulomb est un large cylindre de verre avec des graduations angulaires, surmonté par un cylindre de diamètre plus petit qui supporte un fil de torsion. Ce fil, vertical, soutient un axe horizontal terminé par une petite sphère chargée. A la cage de verre est fixée à la même altitude une autre sphère chargée. Un équilibre s'établit entre les forces électrostatiques de Coulomb qui s'exercent entre les deux sphères chargée et la torsion du fil. On en déduit l'intensité de la force. La position d'une sphère par rapport à l'autre (lue sur les graduations) permet de vérifier que les forces de Coulomb sont inversement proportionnelles à la distance au carré entre les charges (0.5). (voir vidéos sur youtube)
6. Par inspection, il est facile de conclure que le point M sur lequel le champ électrostatique créé par deux charges q_1 en $O(0,0,0)$ et q_2 en $A(1,1,0)$ se trouve au milieu de la droite reliant les deux charges, car en ce point les deux vecteurs ont le même module mais dans deux sens opposés (0.25). En effet, le champ électrostatique créé par la charge q_1 est égal à :

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\overrightarrow{OM}|^2}\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2\sqrt{2}}\overrightarrow{OM} \qquad (0.25)$$

alors que le champ électrostatique créé par la charge q_2 est égal à :

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\overrightarrow{AM}|^2}\frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2\sqrt{2}}\overrightarrow{AM} \qquad (0.25)$$

avec

$$\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{OM} \qquad (0.25)$$

ce qui donne

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}$$

En effet, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est donné par

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 45\vec{i} + \sin 45\vec{j}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}) = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \qquad (0.5)$$

Exercice 01 :(5 points)

On donne le champ vectoriel $\vec{A}(x,y,z) = -yx^2\vec{i} + xy^2\vec{j}$.

1. Le vecteur $\vec{A}$ au point $(1,1,0)$ est égal à :

$$\vec{A}(1,1,0) = -\vec{i} + \vec{j}$$

Son module est égal à $\sqrt{2}$ et son vecteur unité est égal à (0.5)

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}(1,1,0)}{|\vec{A}(1,1,0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$$

Le vecteur $\vec{A}$ au point $(1,-1,0)$ est égal à :

$$\vec{A}(1,-1,0) = \vec{i} + \vec{j}$$

Son module est égal à $\sqrt{2}$ et son vecteur unité est égal à (0.5)

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}(1,-1,0)}{|\vec{A}(1,-1,0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$$

Le vecteur $\vec{A}$ au point $(-1,1,0)$ est égal à :

$$\vec{A}(-1,1,0) = -\vec{i}-\vec{j}$$

Son module est égal à $\sqrt{2}$ et son vecteur unité est égal à (0.5)

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}(-1,1,0)}{|\vec{A}(-1,1,0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i}-\vec{j})$$

Le vecteur $\vec{A}$ au point $(-1,-1,0)$ est égal à :

$$\vec{A}(-1,-1,0) = \vec{i}-\vec{j}$$

Son module est égal à $\sqrt{2}$ et son vecteur unité est égal à (0.5)

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}(-1,-1,0)}{|\vec{A}(-1,-1,0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j})$$

2. Le calcul donne (0.5)

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = (x^2+y^2)\vec{k}$$

Ce champ vectoriel a un rotationnel non nul (sauf pour $x = 0$ et $y = 0$) ; ce qui signifie physiquement qu'un objet se trouvant sur ce champ fait une rotation autour de l'axe $\vec{k}$ dans le sens contraire de rotation des aiguilles de la montre avec une intensité qui croit en s'éloignant du centre $O(0,0,0)$. (0.5)

3. Nous avons (0.5)

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0 \qquad (0.5)$$

Le résultat général qu'on peut tirer est que la divergence du rotationnel d'un vecteur est toujours nulle. (0.5)

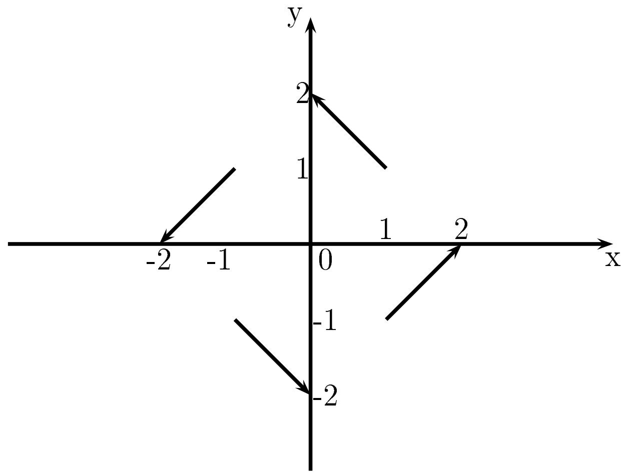
4. Sans faire de calcul, on doit remarquer que le champ $\vec{A}$ sur la droite reliant les deux points $(0,0,0)$ et $(1,0,0)$ est nul, car y y est nul, ce qui donne une circulation nulle le long de la droite reliant ces deux points. (0.5)

$$\int \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Exercice 02 :(5 points)

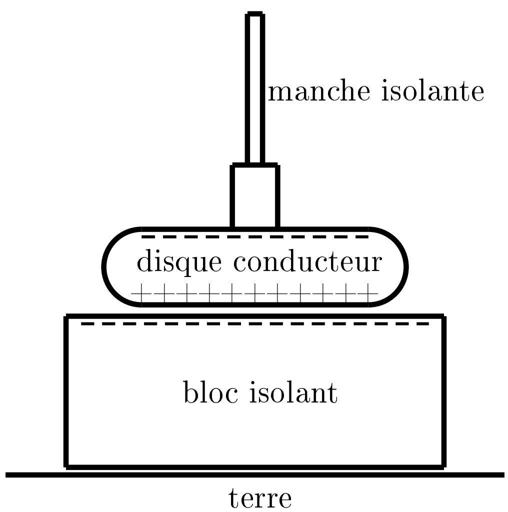
L'électrophore, un appareil inventé par Alessandro Volta en 1775, est composé d'un bloc parallélépipédique fait d'une matière isolante (plastique) sur lequel est mis un disque métallique avec une manche isolante (voir figure ci-dessous)

1. En frottant le bloc isolant avec de la peau de chat, des charges électriques passent de la peau de chat vers le bloc isolant ou l'inverse. Le bloc devient chargé négativement (par exemple), et les charges électriques vont rester sur la surface supérieure du bloc car leur mobilité est faible (le bloc est un isolant). (1.0)



(0.5)

2. On utilise un isolant entre la terre et le disque métallique pour éviter que les charges électriques produites lors du frottement passent vers la terre (un immense réservoir de charges électriques) qui, elle, peut attirer des charges électriques. (0.5)
3. En déposant le disque en métal sur le bloc isolant, des charges négatives du disque vont sentir l'effet des charges négatives du bloc isolant et se repoussent, ce qui les emmènent vers la surface supérieure du disque (induction électrostatique). Leurs positions sur lesquelles étaient déposées (et maintenant désertées) deviennent chargées positivement et la surface inférieure du disque est chargée positivement. Remarquons que les charges négatives de l'isolant ne passent pas vers le disque métallique. (1.0)



(0.5)

4. En touchant du doigt le disque en métal, les charges négatives passent à travers le corps humain vers la terre car le corps humain est un bon conducteur à travers lequel les charges vont regagner la terre. (0.5)
5. Le disque en métal est ensuite mis en contact avec un électroscope. Les feuilles de ce dernier s'écartent. Cela signifie que le disque est électriquement chargé, et que les charges négatives sont passées des feuilles de l'électroscope vers le disque afin de combler le manque de charges

électrique sur ce dernier. Les deux feuilles de l'électroscope sont donc chargées positivement ; ce qui a entrainé l'écartement de ces dernières. (1.0)

6. Un électrophore peut servir à extraire des charges électriques d'un matériau isolant et à charger ensuite un conducteur. (0.5)