

D.S 1 d'Analyse 1

L'usage de la calculatrice est interdit

Questions de cours

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifiez votre réponse.

1. $(|u_n|)_n$ convergente $\iff (u_n)_n$ convergente
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0 \implies \exists \delta = \delta(x_0) > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > 0$.
3. La fonction f définie par, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, est continue en 0.

Exercice 1

1. Montrer que $nE(x) \leq E(nx)$.
2. En déduire que $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

Exercice 2

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes

$$\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

Exercice 3

Soit la suite réelle définie par: $\begin{cases} u_{n+1} = (u_n)^2 - 3(u_n) + 5; n \geq 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

1. Montrer que $(u_n)_n$ est croissante.
2. Si $(u_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, donner l'équation vérifiée par l . Conclure.
3. Déterminer $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ et $\min A$ s'ils existent, où

$$A = \{u_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

Corrigé du D.S 1 d'Analyse 1

Questions de cours (5pts)

1. L' affirmation 1 est fausse car. $(|u_n|)_n$ convergente $\nRightarrow (u_n)_n$ convergente par exemple: $u_n = (-1)^n$ n'est pas convergente mais $(|u_n|)_n$ est convergente [1.5pt]

2. L' affirmation 2 est vraie, en effet

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0 \stackrel{\text{par définition de } \lim}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0, \forall x \in D_f,$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon \stackrel{\text{par définition de } |\cdot|}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0, \forall x \in D_f,$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies l - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + l.$$

En Prenant $\varepsilon := \frac{l}{2} > 0$ dans cette définition on obtient: $\exists \delta = \delta(\frac{l}{2}, x_0) > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > l -$

3. L' affirmation 3 est fausse, en effet, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, n'est continue en aucun point de \mathbb{R} et donc elle ne l'est pas en 0.

en considérant la définition sequentielle de la continuité ,:

$$x_n = \frac{\pi}{n}, n \geq 1, x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \forall n \geq 1; f(x_n) = -1 \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = f(0). \text{ [2pts]}$$

Exercice 1(5pts)

1. Par définition de la partie entière $\forall n \in \mathbb{Z}, nE(x) \in \mathbb{Z}$ et $nE(x) \leq nx$.
 $(E(nx) = \text{plus grand entier} \leq nx.) \implies nE(x) \leq E(nx). (*)$ [2pts]
2. $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) \leq \frac{E(nx)}{n} \leq \frac{nx}{n} = x$. Par définition de la partie entière $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) \leq E(x) . (**)$. [2pts]
- Utilisant (*) et (**), on obtient: $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$. [1pt]

Exercice 2(5pts)

1. Monotonie

(a) La suite $(u_n)_n: \forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$, est croissante $u_{n+1} -$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}\right)$$

$$\text{Or; } \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > 2\sqrt{n+1} \implies \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \implies$$

$$-2\left(\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}\right) > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\text{ce qui entraîne } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}\right) > 0. \text{ [2pts]}$$

(b) La suite $(v_n)_n : \forall n \geq 1, v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ est décroissante

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)$$

Or; $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1} \implies \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \implies -2\left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right) < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$;

ce qui entraîne $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right) < 0$ [1,5pt]

2. $\forall n \geq 1, v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} > u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ car $-2\sqrt{n+1} < -2\sqrt{n}$.

[0,5pt]

et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-2\sqrt{n} + 2\sqrt{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$. [0,5pt]

Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes, elle convergent donc vers la meme limite [0,5pt]

Exercice 3 (5pts)

Soit la suite réelle définie par:
$$\begin{cases} u_{n+1} = (u_n)^2 - 3(u_n) + 5; & n \geq 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1. $u_{n+1} - u_n = (u_n)^2 - 4(u_n) + 5 = (u_n - 2)^2 + 1 > 0 \implies (u_n)_n$ est croissante. [2pts]

2. Si $(u_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, l'équation vérifiée par l est $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^2 - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) + 5 \iff l = l^2 - 3l + 5 \iff (l - 2)^2 = -1$; n'a pas de solution dans \mathbb{R} .

Conclusion: $(u_n)_n$ n'est pas convergente dans \mathbb{R} . Puisqu'elle est croissante, elle est donc non majorée. $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty\right)$ [2pts]

3. Soit

$$A = \{u_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

$(u_n)_n$ est croissante. $u_0 = 1 < u_1 < u_2 < \dots < u_n < \dots$

$\sup A$ n'existe pas dans $\mathbb{R} \implies \max A$ n'existe pas dans \mathbb{R}

$\inf A = \min A = u_0 = 1$.

[0,5pt]

[0,5pt]