E.S.S.A de Tlemcen 21/11/2016
Département de Mathématiques Durée : 1h 30'

D.S 1 d′Analyse 1
L′usage de la calculatrice est interdit

Questions de cours
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifiez votre réponse.

1. $(|u_n|)_n$convergente$\Longleftrightarrow$ $(u_n)_n$convergente
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l > 0 \Longrightarrow \exists \delta = \delta(x_0) > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > 0.$
3. La fonction f définie par, $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si x} \in \mathbb{Q} \\ -1 \text{ si x} \notin \mathbb{Q} \end{cases}$,est continue en 0.

Exercice 1

1. Montrer que $nE(x) \leq E(nx)$.
2. En déduire que $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

Exercice 2
Montrer que les suites suivantes sont adjacentes

$$\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

Exercice 3
Soit la suite réelle définie par: $\begin{cases} u_{n+1} = (u_n)^2 - 3(u_n) + 5; \; n \geq 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

1. Montrer que $(u_n)_n$est croissante.
2. Si $(u_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, donner l'équation vérifiée par l. Conclure.
3. Determiner $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ et $\min A$ s'ils existent, où

$$A = \{u_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

E.S.S.A de Tlemcen 21/11/2016
Département de Mathématiques Durée : 1h 30'

Corrigé du **D.S 1 d'Analyse 1**

Questions de cours ($5pts$)

1. L' affirmation 1 est fausse car.$(|u_n|)_n$convergente $\nRightarrow (u_n)_n$convergente par exemple: $u_n = (-1)^n$ n'est pas convergente mais $(|u_n|)_n$ est convergente $\boxed{1.5\text{pt}}$

2. L' affirmation 2 est vraie, en effet
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0 \overset{\text{par definition de lim}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0, \forall x \in D_{f},$
$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \overset{\text{par definition de } |.|}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0, \forall x \in D_{f},$
$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow l - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + l.$
En Prenant $\varepsilon := \frac{l}{2} > 0$ dans cette définition on obtient: $\exists \delta = \delta(\frac{l}{2}, x_0) > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > l -$

3. L' affirmation 3 est fausse, en effet, $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si x} \in \mathbb{Q} \\ -1 \text{ si x} \notin \mathbb{Q} \end{cases}$,n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$et donc elle ne l'est pas en 0.
en considérant la définition sequentielle de la continuité ,:
$x_n = \frac{\pi}{n}, n \geq 1$, $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ et $\forall n \geq 1; f(x_n) = -1 \underset{n \to \infty}{\nrightarrow} 1 = f(0).$$\boxed{2\text{pts}}$

Exercice 1($5pts$)

1. Par définition de la partie entière $\forall n \in \mathbb{Z}$, $nE(x) \in \mathbb{Z}$ et $nE(x) \leq nx$. $\big(E(nx) =$ plus grand entier $\leq nx.\big) \Longrightarrow nE(x) \leq E(nx).(*)$ $\boxed{2\text{pts}}$

2. $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) \leq \frac{E(nx)}{n} \leq \frac{nx}{n} = x$.Par définition de la partie entière $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) \leq E(x).(**)$. $\boxed{2\text{pts}}$
Utilisant $(*)$ et $(**)$, on obtient: $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$. $\boxed{1\text{pt}}$

Exercice 2($5pts$)

1. Monotonie

   (a) La suite $(u_n)_n$:$\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$, est croissante $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right)$
   Or;$\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > 2\sqrt{n+1} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} < \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \Longrightarrow -2\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right) > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$
   ce qui entraine $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right) > 0.$$\boxed{2\text{pts}}$

(b) La suite $(v_n)_n$:$\forall n\geq 1, v_n{=}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}{-}2\sqrt{n}$ est décroissante

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)$$

Or;$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}<2\sqrt{n+1}\Longrightarrow\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>\frac{1}{2\sqrt{n+1}}\Longrightarrow-2\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)<\frac{1}{\sqrt{n+1}}$;

ce qui entraine $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)<0$ $\boxed{\text{1,5pt}}$

2. $\forall n\geq 1, v_n{=}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}{-}2\sqrt{n}>u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}{-}2\sqrt{n+1}$ car $-2\sqrt{n+1}<-2\sqrt{n}$. $\boxed{\text{0,5pt}}$

   et $\lim\limits_{n\to\infty}v_n{-}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-2\sqrt{n}+2\sqrt{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$ $\boxed{\text{0,5pt}}$

Les suites$(u_n)_n$et $(v_n)_n$ sont adjacentes, elle convergent donc vers la meme limite $\boxed{\text{0,5pt}}$

<u>Exercice 3</u>($5pts$)

Soit la suite réelle définie par: $\left\{\begin{array}{c} u_{n+1}=(u_n)^2-3(u_n)+5;\ n\geq 1 \\ u_0=1\end{array}\right.$

1. $u_{n+1}-\ u_n=(u_n)^2-4(u_n)+5=(u_n-2)^2+1>0\Longrightarrow(u_n)_n$est croissante.$\boxed{\text{2pts}}$

2. Si $(u_n)_n$ converge vers $l\in\mathbb{R}$, l'équation vérifiée par l. est $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(u_n)^2-3\lim\limits_{n\to\infty}(u_n)+5\Longleftrightarrow l=l^2-3l+5\Longleftrightarrow(l-2)^2=-1$;n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
   <u>Conclusion</u>: $(u_n)_n$ n'est pas convergente dans $\mathbb{R}$.Puisqu'elle est croissante , elle est donc non majorée.$\left(\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty\right)$ $\boxed{\text{2pts}}$

3. Soit
$$A=\{u_n;n\in\mathbb{N}\}.$$
   $(u_n)_n$ est croissante .$u_0=1<u_1<u_2<......<u_n<....$
   sup A n'existe pas dans $\mathbb{R}\Longrightarrow$,max A n'existe pas dans$\mathbb{R}$ $\boxed{\text{0,5pt}}$
   inf A =min $A=u_0=1$. $\boxed{\text{0,5pt}}$