REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

ECOLE SUPERIEURE DES SCIENCES APPLIQUEES

المدرسة العليا في العلوم التطبيقية

TLEMCEN

تلمسان

Département de mathématiques
Module Algèbre 1 AU :2016/2017
durée : 1 heure 30

Corrigé du devoir surveillé numéro 1

**Exercice 1** (6 pts)**.** Soient $E$ un ensemble non vide et $A, B \in \mathcal{P}(E)$ et $f : E \to F$ une application.

| Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses : | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| 1. $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ | | x |
| 2. $f$ surjective $\Rightarrow f|_A$ surjective | | x |
| 3. $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$ | | x |

**Exercice 2** (4 pts)**.** Soit $(G, *)$ un groupe,montrer que :

$$\forall x, y \in E, (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$$

$(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = e \Rightarrow (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$ $\boxed{1pt}$

On définit l'application $\varphi$ par :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : (G, *) & \to & (G, *) \\ x & \to & \varphi(x) = x^{-1} \end{array} \quad \text{avec } x^{-1} \text{ symétrique de } x$$

Prouver que : [$\varphi$ morphisme de groupe] $\Leftrightarrow$ [$G$ abélien]

$\Rightarrow$ :Soient $x, y \in G$

$\varphi(x^{-1} * y^{-1}) = \varphi(x^{-1}) * \varphi(y^{-1}) \Rightarrow (x^{-1} * y^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1} * (y^{-1})^{-1}$ $\boxed{2pts}$

$\Rightarrow y * x = x * y$

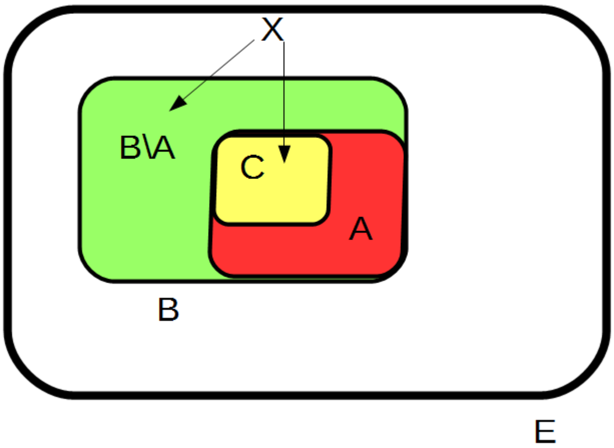
$\Leftarrow$ :Soient $x, y \in G$

$\varphi(x * y) = (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1} = x^{-1} * y^{-1} = \varphi(x) * \varphi(y)$ $\boxed{1pt}$

**Exercice 3** (5 pts)**.** Soit $E$ un ensemble non vide et soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ non vides

$$\begin{array}{rcl} f_A : \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & X \cup A \end{array}$$

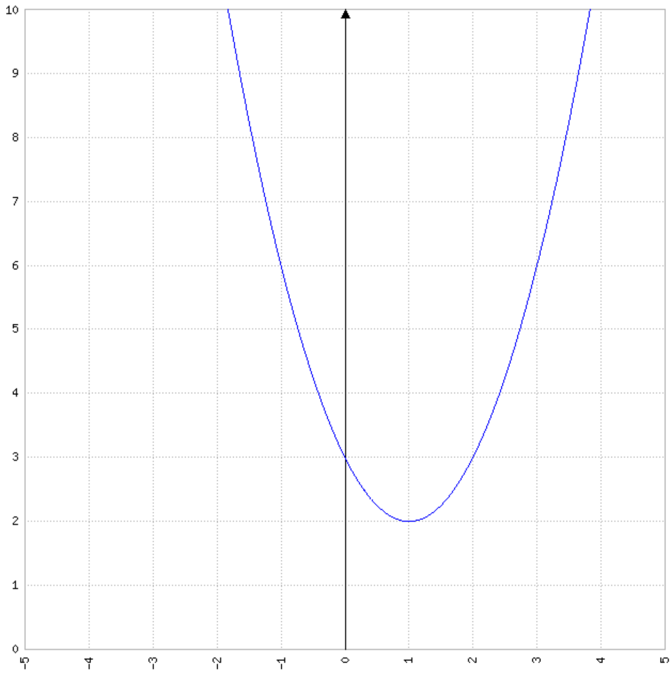
1. A quelle condition l'équation $X \cup A = B$ admet elle au moins une solution dans $\mathcal{P}(E)$
   $A \subset (X \cup A)$ donc, $X \cup A = B \Rightarrow A \subset B$ $\boxed{1pt}$
2. Résoudre l'équation $X \cup A = B$
   $x \in C_B^A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in X \cup A \Rightarrow (x \in X)$ ou $(x \in A) \Rightarrow x \in X$ car $C_B^A \cap A = \emptyset$
   Donc, $C_B^A \subset X \Rightarrow X = C_B^A \cup C$ avec $C_B^A \cap C = \emptyset$
   En remplaçant dans l'équation, on obtient $X \cup A = B \Rightarrow (C_B^A \cup C) \cup A = B \Rightarrow C \cup B = B \Rightarrow C \subset B$ mais $C_B^A \cap C = \emptyset$ d'où $C \subset A$
   Ainsi, la solution de l'équation est $X = C_B^A \cup C$ avec $C \in P(A)$ $\boxed{2pts}$




3. En déduire que l'application $f_A$ n'est pas injective
   Prenons $X_1 = C_B^A \cup A = B$ et $X_2 = C_B^A \cup \emptyset = C_B^A$, on aura
   $f_A(X_1) = f_A(X_2) = B$ donc $f_A$ n'est pas injective. $\boxed{2pts}$

**Exercice 4** (5 pts)**.** Soit $A$,$B$ deux parties de $\mathbb{R}$ de cardinal infini.

$$\begin{array}{rcl} f : A & \to & B \\ x & \mapsto & x^2 - 2x + 3 \end{array}$$



1. Déterminer $A, B$ pour que $f$ soit une application bijective.
   Pour que $f$ soit une application, il suffit de prendre $A = B = \mathbb{R}$ $\boxed{1pt}$
   
   Injectivité
   
   Soient $x_1, x_2 \in A$ tels que : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 2x_1 + 3 = x_2^2 - 2x_2 + 3$
   $\Rightarrow (x_1^2 - x_2^2) - 2(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)[(x_1 + x_2) - 2] = 0$
   On doit choisir $A$ tel que $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 + x_2 \neq 2$ $\boxed{0.5pt}$
   Par exemple, on prend $\boxed{A = [1, +\infty[}$ $\boxed{0.5pt}$
   
   Surjectivité
   
   $y = x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2$
   $x \geq 1 \Rightarrow (x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow y \geq 2$ $\boxed{0.5pt}$
   On prend $\boxed{B = [2, +\infty[}$ $\boxed{0.5pt}$
2. Déterminer dans ce cas l'application réciproque $f^{-1}$
   $y = x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2 \Rightarrow y - 2 = (x - 1)^2$
   $\Rightarrow \sqrt{y - 2} = x - 1 \Rightarrow \sqrt{y - 2} + 1 = x$ $\boxed{1pt}$
   $$\begin{array}{lcl} f^{-1} : [2, +\infty[ & \rightarrow & [1, +\infty[ \\ x & \mapsto & \sqrt{x - 2} + 1 \end{array}$$ $\boxed{1pt}$