



Département de mathématiques
 Module Algèbre 1
 durée : 1 heure 30

AU :2016/2017

Corrigé du devoir surveillé numéro 1

Exercice 1 (6 pts). Soient E un ensemble non vide et $A, B \in \mathcal{P}(E)$ et $f : E \rightarrow F$ une application.

Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses :

Vrai Faux

1. $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
--------------------------	-------------------------------------

2. f surjective $\Rightarrow f|_A$ surjective

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
--------------------------	-------------------------------------

3. $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
--------------------------	-------------------------------------

Exercice 2 (4 pts). Soit $(G, *)$ un groupe, montrer que :

$$\forall x, y \in E, (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$$

$$(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = e \Rightarrow (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$$

1pt

On définit l'application φ par :

$$\begin{aligned} \varphi : (G, *) &\rightarrow (G, *) \\ x &\rightarrow \varphi(x) = x^{-1} \end{aligned} \quad \text{avec } x^{-1} \text{ symétrique de } x$$

Prouver que : $[\varphi \text{ morphisme de groupe}] \Leftrightarrow [G \text{ abélien}]$

\Rightarrow : Soient $x, y \in G$

$$\begin{aligned} \varphi(x^{-1} * y^{-1}) &= \varphi(x^{-1}) * \varphi(y^{-1}) \Rightarrow (x^{-1} * y^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1} * (y^{-1})^{-1} \\ &\Rightarrow y * x = x * y \end{aligned}$$

2pts

\Leftarrow : Soient $x, y \in G$

$$\varphi(x * y) = (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1} = x^{-1} * y^{-1} = \varphi(x) * \varphi(y)$$

1pt

Exercice 3 (5 pts). Soit E un ensemble non vide et soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ non vides

$$f_A : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$$

$$X \mapsto X \cup A$$

1. A quelle condition l'équation $X \cup A = B$ admet elle au moins une solution dans $\mathcal{P}(E)$

$$A \subset (X \cup A) \text{ donc, } X \cup A = B \Rightarrow A \subset B$$

1pt

2. Résoudre l'équation $X \cup A = B$

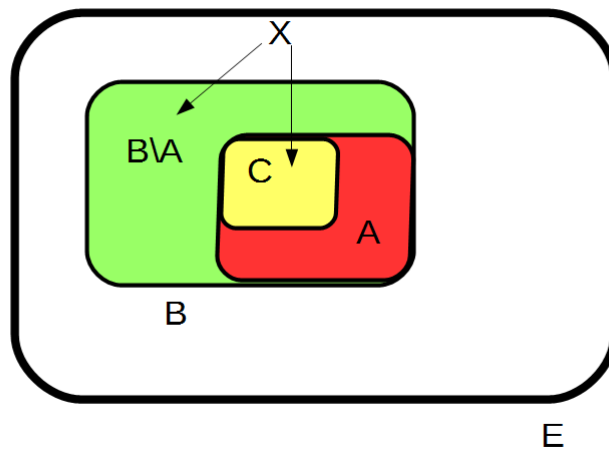
$$x \in C_B^A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in X \cup A \Rightarrow (x \in X) \text{ ou } (x \in A) \Rightarrow x \in X \text{ car } C_B^A \cap A = \emptyset$$

$$\text{Donc, } C_B^A \subset X \Rightarrow X = C_B^A \cup C \text{ avec } C_B^A \cap C = \emptyset$$

$$\text{En remplaçant dans l'équation, on obtient } X \cup A = B \Rightarrow (C_B^A \cup C) \cup A = B \Rightarrow C \cup B = B \Rightarrow C \subset B \text{ mais } C_B^A \cap C = \emptyset \text{ d'où } C \subset A$$

$$\text{Ainsi, la solution de l'équation est } X = C_B^A \cup C \text{ avec } C \in \mathcal{P}(A)$$

2pts



3. En déduire que l'application f_A n'est pas injective

$$\text{Prenons } X_1 = C_B^A \cup A = B \text{ et } X_2 = C_B^A \cup \emptyset = C_B^A, \text{ on aura}$$

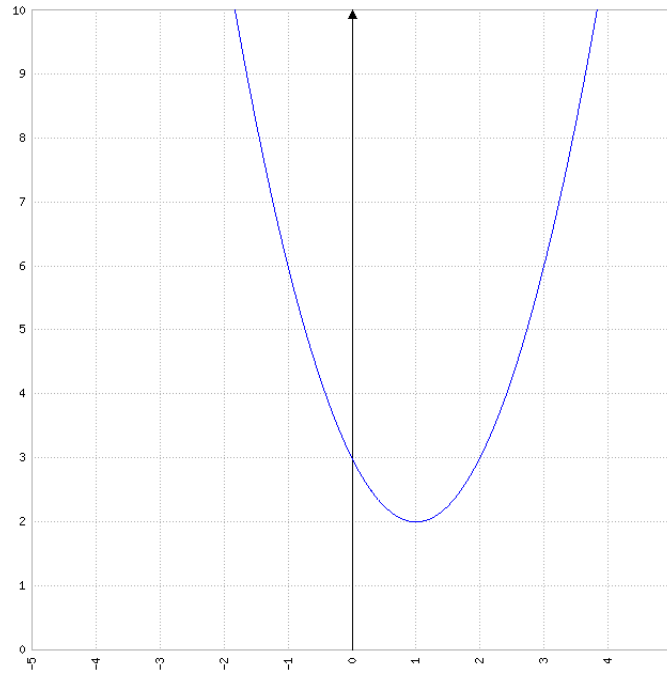
$$f_A(X_1) = f_A(X_2) = B \text{ donc } f_A \text{ n'est pas injective.}$$

2pts

Exercice 4 (5 pts). Soit A, B deux parties de \mathbb{R} de cardinal infini.

$$f : A \rightarrow B$$

$$x \mapsto x^2 - 2x + 3$$



1. Déterminer A, B pour que f soit une application bijective.

Pour que f soit une application, il suffit de prendre $A = B = \mathbb{R}$

1pt

Injectivité

$$\begin{aligned} \text{Soient } x_1, x_2 \in A \text{ tels que : } f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow x_1^2 - 2x_1 + 3 = x_2^2 - 2x_2 + 3 \\ &\Rightarrow (x_1^2 - x_2^2) - 2(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)[(x_1 + x_2) - 2] = 0 \end{aligned}$$

On doit choisir A tel que $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 + x_2 \neq 2$

0.5pt

Par exemple, on prend $A = [1, +\infty[$

0.5pt

Surjectivité

$$y = x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2$$

$$x \geq 1 \Rightarrow (x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow y \geq 2$$

0.5pt

On prend $B = [2, +\infty[$

0.5pt

2. Déterminer dans ce cas l'application réciproque f^{-1}

$$y = x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2 \Rightarrow y - 2 = (x - 1)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{y - 2} = x - 1 \Rightarrow \sqrt{y - 2} + 1 = x$$

1pt

$$\begin{aligned} f^{-1} : [2, +\infty[&\rightarrow [1, +\infty[\\ x &\mapsto \sqrt{x - 2} + 1 \end{aligned}$$

1pt