École Préparatoire en Sciences et Techniques de Tlemcen

Département de Physique

Examen de rattrapage - Physique II (Durée 2h)

Questions de cours :

1. Expliquer pourquoi une pièce en fer est attirée par un aimant.
2. Le champ magnétique créé par un courant permanent est représenté par un pseudo-vecteur. Expliquer.
3. Écrire l'expression du champ magnétique créé en un point $\vec{r}$ par une densité de courant permanent $\vec{j}$.
4. Écrire les expressions mathématiques dans leurs formes locale et intégrale représentant le théorème d'Ampère.
5. Écrire l'expression qui relie le potentiel vecteur $\vec{A}$ au vecteur densité de courant $\vec{j}$ en prenant la divergence du vecteur $\vec{A}$ égale à zéro.
6. Deux fils conducteurs parallèles de longueur L séparés d'une une distance d et parcourus, respectivement, par deux courants permanents I_1 et I_2 dans deux sens opposés. Calculer la force appliquée par l'un des fils sur l'autre.

Exercice 01 :

Une sphère métallique de rayon R_1 porte une charge électrique surfacique totale Q_1 distribuée uniformément.

1. Donner l'expression de la capacité électrique de la sphère.
2. Donner l'expression de son énergie potentielle électrique.

On relie la sphère chargée par un fil conducteur à une deuxième sphère initialement neutre et isolée de rayon R_2 (placée à grande distance de la première sphère.)

3. Quelle sera la charge à l'équilibre sur chacune des sphères ?
4. Quelles sont les énergies des deux sphères après qu'elles soient reliées entre elles ?
5. Montrer que la charge est distribuée sur les deux sphères reliées entre elles de telle sorte que

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

où σ est la densité surfacique de charge.

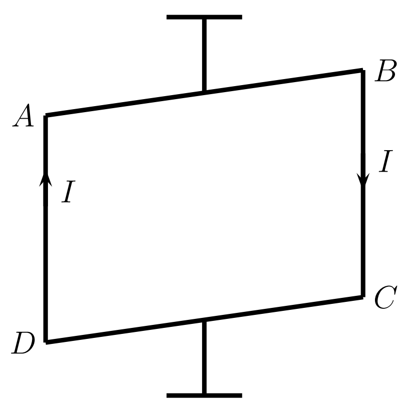
6. Montrer en conséquence que le rapport des champs électriques sur les surfaces des deux sphères s'écrit sous la forme :
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

On négligera dans le problème l'effet du fil de liaison.

Exercice 02 :

On dispose d'un cadre mobile ABCD pouvant tourner autour d'un fil (le long de l'axe des z) suspendu aux extrémités et fixés aux milieux des côtés AB et CD (voir figure ci-dessous). Le carde est parcouru par un courant permanent I dans le sens ABCD et plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_y \vec{u}_y$. Le plan de la page est le plan Oyz.

1. Calculer les forces appliquées sur chaque coté du cadre. Le cadre va-t-il tourner ? Si oui, dans quel sens ? Justifier.
2. Calculer le couple de rotation en fonction de l'angle de rotation.
3. Calculer l'énergie potentielle du cadre.
4. Quelle est la position du cadre par rapport au champ magnétique pour que le cadre soit en position d'équilibre ?



Corrigé de l'examen de rattrapage de Physique 02 (Électricité)

Questions de Cours :

1/ Le fer est un matériau dit "ferromagnétique doux" c'est à dire que les moments magnétiques dus à la révolution des électrons des atomes de fer autour de leurs noyaux s'ajoutent lorsqu'un champ magnétiques est appliqué et crée dans le fer un champ magnétique macroscopique qui permet d'attirer la pièce en fer vers l'aimant (les pôles différents s'attirent). La pièce de Fer peut garder une aimantation même après que le champ magnétique externe (dû à l'aimant) cesse d'exister. Un aimant est un ferromagnétique dur car il est aimanté de façon permanente.

2/ le champ magnétique créé par un élément de courant permanent $I\vec{dl}$ est donné par :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I\vec{dl} \wedge \frac{\vec{PM}}{|PM|^3}$$

où M est le point où l'on veut mesurer $d\vec{B}$ et P et la position de $I\vec{dl}$.

On voit bien que $d\vec{B}$ est le résultat d'un produit vectoriel $I\vec{dl} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3}$, donc sa direction est définie par une convention que les physiciens ont adopté. Elle n'est pas donc une réalité physique comme la direction de la vitesse ou la force, mais plutôt une proposition mathématique !

Ce genre de vecteurs est appelé pseudo-vecteur.

3/ le champ magnétique créé en M par un courant permanent I est donné par la loi de Biot et Savart comme

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I\vec{dl} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

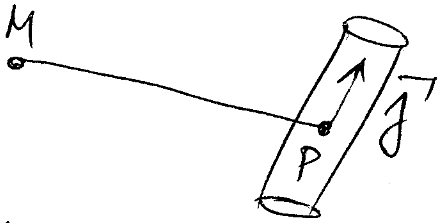
mais on sait aussi que $I\vec{dl} = \vec{J}\,dV$

où $\vec{J}$ est le vecteur densité du courant tel que :

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

ce qui donne :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \, \vec{J} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \, dV$$

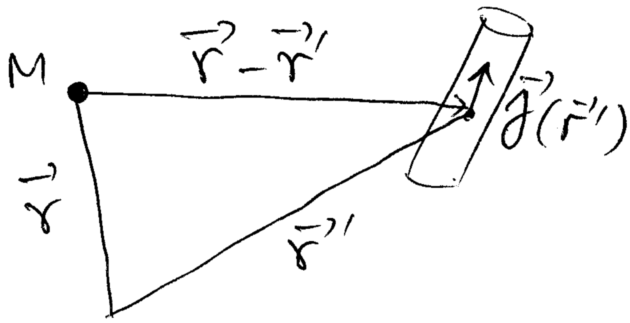


le champ $\vec{B}$ créé en M pour la totalité du fil s'obtient en faisant l'intégrale sur le volume du fil ; d'où :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{J} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \, dV$$

D'une manière générale, si $\vec{J}$ est repéré par $\vec{r}'$ et M par $\vec{r}$, on aura

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{J}(\vec{r}') \wedge \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \, dV$$



4/ Théorème d'Ampère :

la circulation du champ $\vec{B}$ le long d'une courbe C quelconque, orientée et fermée, appelée contour d'Ampère, est égale à μ_0 fois la somme algébrique des courants qui traversent la surface délimitée par C :

$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_{int} \quad \text{(forme intégrale)}$$

sachant que $I_{int} = \iint_{S_c} \vec{J}\cdot\vec{dS}$

où S_c est la surface délimitée par la courbe C, et en utilisant le théorème de Stokes, à savoir :

$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \iint_{S_c} \vec{\nabla}\wedge\vec{B}\cdot\vec{dS}$$

on aura :

$$\iint_{S_c} \vec{\nabla}\wedge\vec{B}\cdot\vec{dS} = \mu_0 \iint_{S_c} \vec{J}\cdot\vec{dS}$$

ou encore :

$$\iint_{S_c} \left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B} - \mu_0\vec{J}\right)\cdot\vec{dS} = 0$$

Cette équation est valable pour une surface arbitraire (S_c infiniment petite !) telle que

$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \vec{J}$ ne dépend pas de S :

$$\iint_{S_c} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \vec{J}) \cdot d\vec{S} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \vec{J}) \cdot \underbrace{\iint d\vec{S}}_{\neq 0} = 0$$

ce qui donne : $\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$

Ceci est la forme locale du théorème d'Ampère.

5/ le vecteur potentiel $\vec{A}$ est introduit afin de simplifier les calculs du champ magnétique, de la même manière que le potentiel V est introduit pour le calcul du champ électrostatique $\vec{E}$:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

mais on sait que $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$; d'où :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

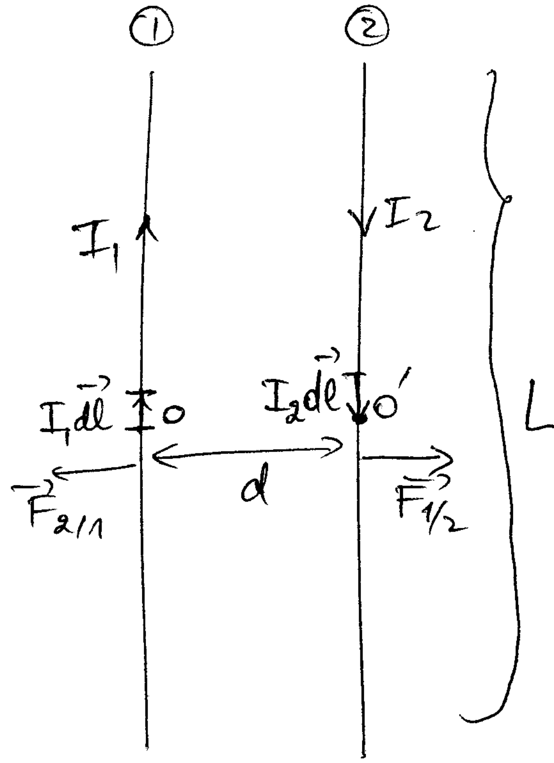
mais comme on a pris $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$; on aura :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$; ou encore :

$$\boxed{\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}$$

6/ Selon la loi de Laplace, la force qu'applique un champ magnétique sur un élément de courant ~~est~~ $I\vec{dl}$ est égale à :

$$d\vec{F} = I\vec{dl} \wedge \vec{B}$$

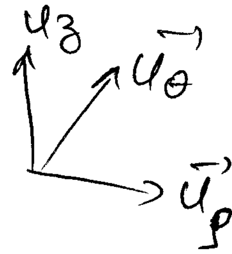


le champ magnétique créé par le fil ① sur l'élément $I_1\vec{dl}$ sur le fil ② est donné par :

$$\vec{B}_1(O') = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}\vec{u_\theta}$$

mais $I_2\vec{dl}_2 = -I_2 dl\,\vec{u_z}$

on obtient donc :



$$d\vec{F}_{1/2} = (-I_2 dl_2)\vec{u_z} \wedge \vec{u_\theta}\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}\right)$$

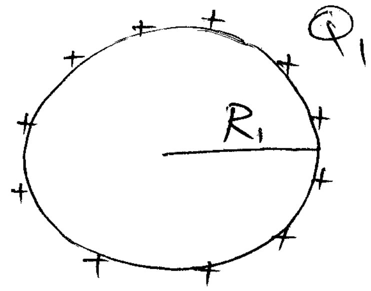
$$= \frac{I_2 dl_2 \mu_0 I_1}{2\pi d}\vec{u_\rho}$$

la force appliquée sur un segment L du fil ② par le fil ① est donnée par :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1 I_2 L\,\vec{u_\rho}$$

Les deux fils se repoussent dans ce cas !

Exercice 01 :



1/ le potentiel électrique créé sur la surface de la sphère est égal à :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R}$$

la capacité de la sphère est donnée par :

$$\boxed{C = \frac{Q_1}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R_1 .}$$

2/ L'énergie potentielle électrostatique de la sphère est donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2}\iint_S \sigma(\vec{r})\, V(\vec{r})\, dS$$

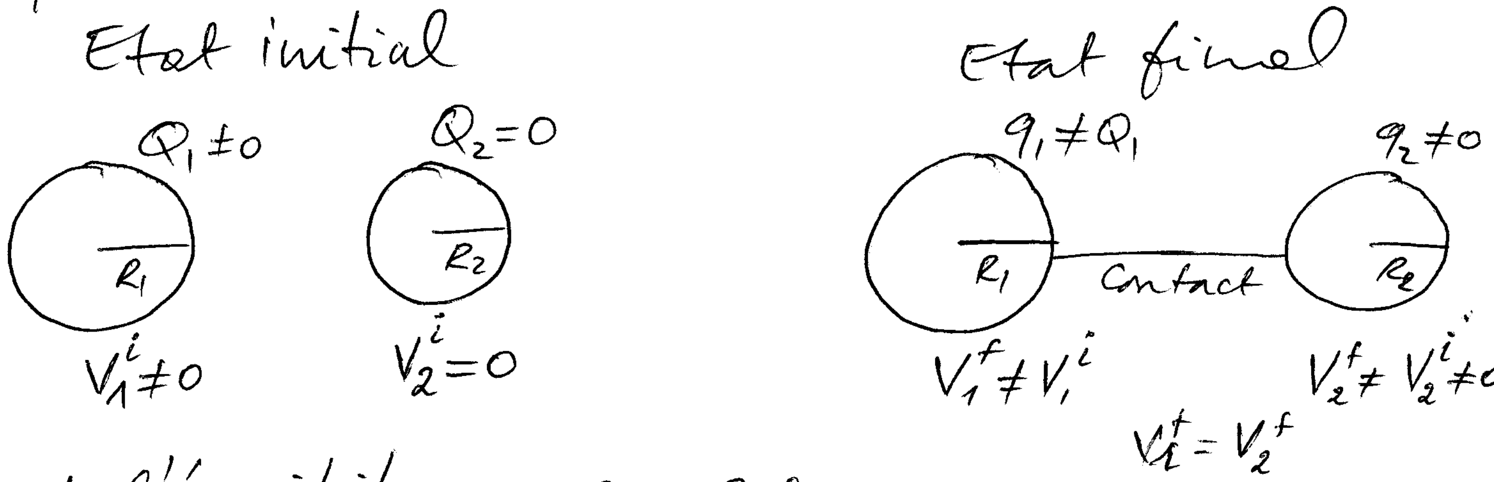
où $\vec{r}$ est un vecteur position des points sur la surface de la sphère. Puisque $V(\vec{r})$ est constant sur la sphère on peut le faire sortir de l'intégrale :

$$E_p = \frac{1}{2} V(R_1) \underbrace{\iint \sigma(\vec{r})\, dS}_{Q_1} = \frac{1}{2} Q_1 \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1}$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1^2}{R_1} .}$$

./.

3/ En reliant les deux sphères de rayons R_1 et R_2 un transfert de charges aura lieu jusqu'à ce que les potentiels électriques sur les deux sphères soient les mêmes (pensez au cas de deux objets à deux températures différentes qui sont mis en contact !)



A l'équilibre on aura :

$$V_1^f = V_2^f$$

mais on sait que : $V_1^f = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = V_2^f$

avec $Q_1 = q_1 + q_2$ (conservation de la charge).

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} = \frac{Q_1 - q_1}{R_2}$$

$$R_2 q_1 = R_1 Q_1 - R_1 q_1 \Rightarrow \boxed{q_1 = \frac{R_1 Q_1}{R_1 + R_2}}$$

et $q_2 = Q_1 - q_1 = Q_1 - \dfrac{R_1 Q_1}{R_1 + R_2} = \dfrac{R_2 Q_1}{R_1 + R_2}$.

4/ les énergies potentielles électrostatiques sont données par :

$$E_{p_1} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q_1^2}{R_1} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\frac{R_1 Q_1}{R_1+R_2}\right)^2}{R_1} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{R_1 Q_1^2}{(R_1+R_2)^2}$$

et $E_{p_2} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q_2^2}{R_2} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 Q_2^2}{(R_1+R_2)^2}$.

5/ On sait d'après la question 3 que :

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}$$

mais comme les charges sont distribuées uniformément sur les surfaces ; on aura :

$$q_1 = \sigma_1 4\pi R_1^2 \quad \text{et} \quad q_2 = \sigma_2 4\pi R_2^2$$

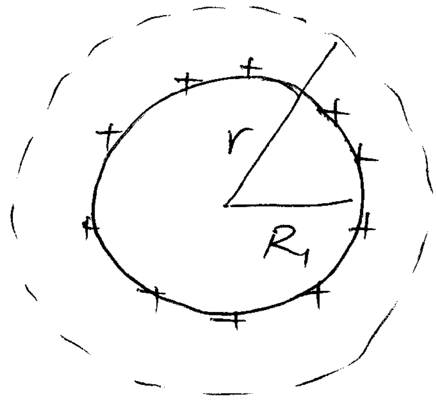
où σ_1 et σ_2 sont les densités surfaciques respectives. On obtient donc :

$$\frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{R_2}$$

ou encore : $\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$; ce qui donne :

$$\boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$

6/ les champs électriques sur les surfaces des sphères sont obtenus en utilisant le théorème de Gauss.



$$\iint \vec{E_1} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

ou encore :

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi R_1^2 \sigma_1}{\varepsilon_0}$$

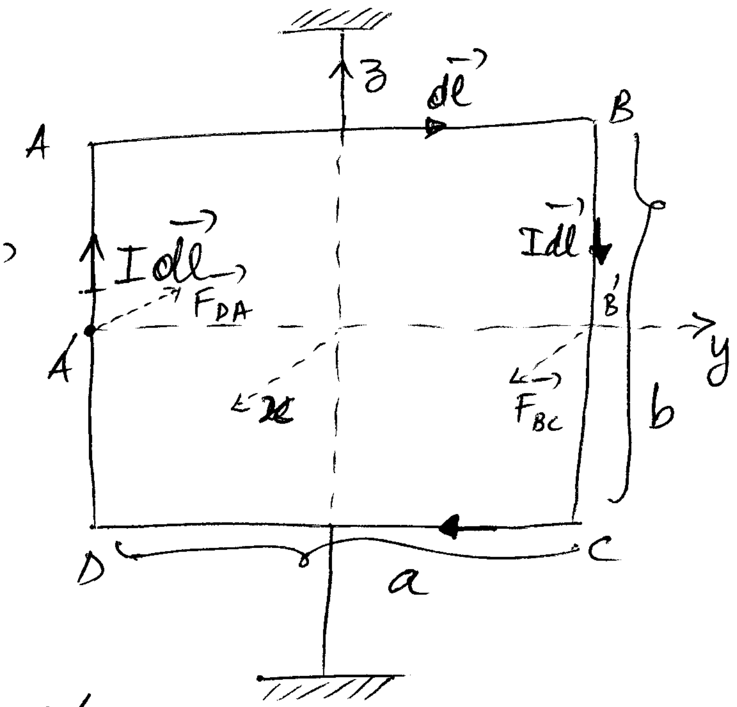
$$E = \frac{4\pi R_1^2 \sigma_1}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$$; mais en $r = R_1$ on aura :

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \quad ; \text{ et } \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}.$$

Ce qui donne : $\boxed{\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \dfrac{R_2}{R_1}}$

Exercice 02 :

$\vec{B} = B_y \vec{u_y}$



Selon la force de Laplace, un élément $\vec{dl}$ du cadre placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ est parcouru par un courant I, est soumis à une force : $d\vec{F} = I\vec{dl} \wedge \vec{B}$.

Supposons que $\vec{B} = B_y \vec{u_y}$ et le cadre est dans le plan Oyz ; les 4 cotés du cadre subissent les forces suivantes ; représentées à leurs centres :

Force sur AB :

$\vec{dl} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ car $\vec{dl} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{F_{AB}} = \vec{0}$

Force sur CD :

$\vec{dl} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ car $\vec{dl}$ et $\vec{B}$ sont antiparallèls $\Rightarrow \vec{F_{CD}} = \vec{0}$.

Force sur. DA :

$$d\vec{F_{DA}} = I(dl\,\vec{u_z}) \wedge B\vec{u_y} = I\,dl\,B_y(-\vec{u_x})$$
$$= -I\,dl\,B_y\,\vec{u_x}.$$

la force $\vec{F}_{DA}$ est obtenue en intégrant entre $-b/2$ et $b/2$; ce qui donne :

$$\vec{F}_{DA} = \left(-I B_y \int_{-b/2}^{b/2} dl\right)\vec{u_x} = -I B_y b \,\vec{u_x}$$

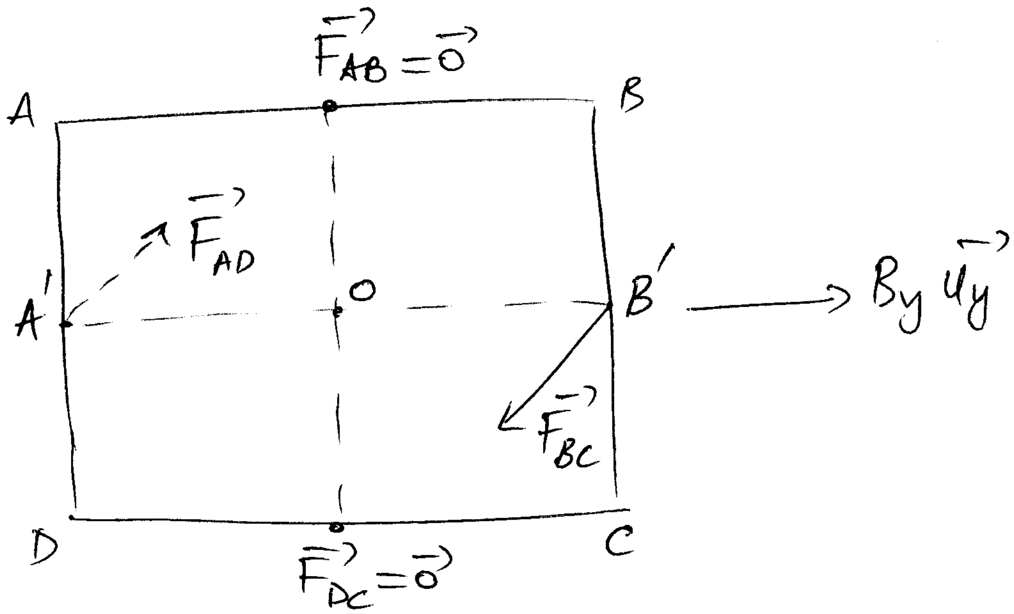
la force $\vec{F}_{DA}$ est représentée par symétrie en A'

<u>Force sur BC</u> :

$$d\vec{F}_{BC} = I\vec{dl}\wedge\vec{B} = I(dl\,\vec{u_z})\wedge(B_y\vec{u_y}) = -I\,dl\,B_y\,\vec{u_x}$$

la force sur le coté BC s'obtient en intégrant entre $-b/2$ et $b/2$, d'où :

$$\vec{F}_{BC} = \left(-I B_y \int_{b/2}^{-b/2} dl\right)\vec{u_x} = I B_y b\,\vec{u_x}.$$



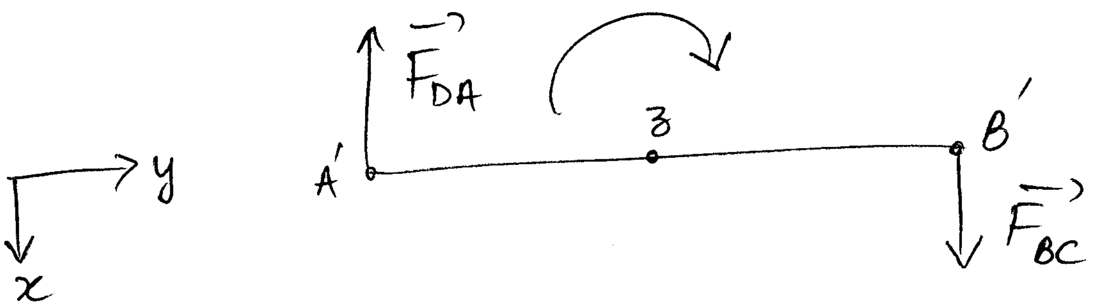
Le cadre va donc tourner dans la direction horaire (en voyant le cadre d'en haut) autour de l'axe des z ; sous l'effet du couple de forces $\vec{F}_{AD}$ et $\vec{F}_{BC}$, dont la somme est nulle.

2/ Afin de caractériser le mouvement de rotation on calcule le moment de ces forces par rapport au centre d'inertie du cadre O.

Remarquons que $\vec{F}_{AD} + \vec{F}_{BC} = \vec{0}$.

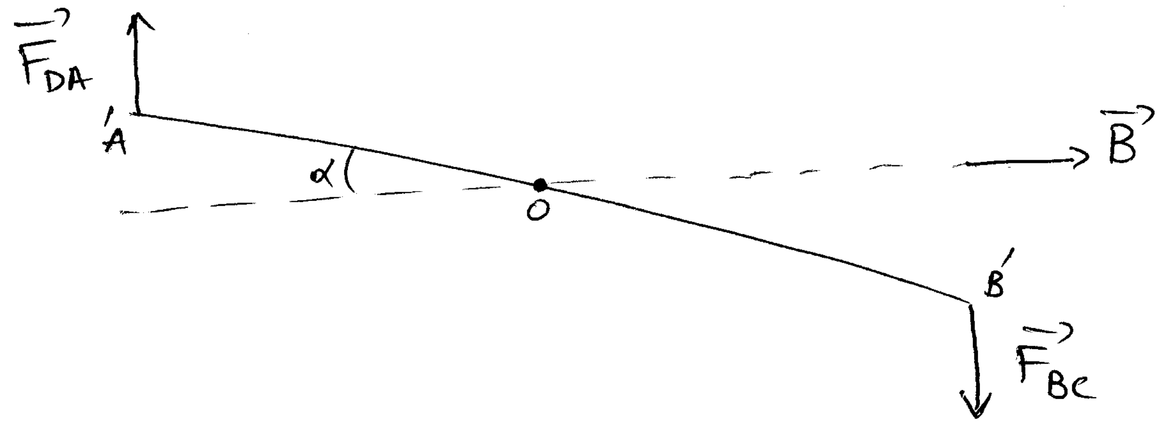
$$\vec{\mathcal{M}}_{/O} = \vec{OA'} \wedge \vec{F}_{AD} + \vec{OB'} \wedge \vec{F}_{BC}$$
$$= \frac{a}{2}\left(-\vec{u_y}\right) \wedge \left(-I B_y b\right)\vec{u_x} + \frac{a}{2}\vec{u_y} \wedge I B b \vec{u_x}$$
$$= a b I B \left(\vec{u_y} \wedge \vec{u_x}\right) = -a b I B_y \vec{u_z}.$$

Ce moment $\vec{\mathcal{M}}_{/O}$ donne naissance à une accélération angulaire qui fait tourner le cadre autour de l'axe z dans la direction représentée sur la figure ci-dessous :



Vu d'en haut.

à un instant donné, le cadre fait un angle α avec le plan Oyz ; tel que :



le moment des forces $\vec{F}_{DA}$ et $\vec{F}_{BC}$ par rapport au centre d'inertie du cadre O est donné par :

$$\vec{\mathcal{M}}_{/O} = \vec{OA'} \wedge \vec{F}_{DA} + \vec{OB'} \wedge \vec{F}_{BC}$$

$$= \frac{a}{2} F_{DA} \sin(\vec{OA'}, \vec{F}_{DA})(-\vec{u}_z)$$

$$+ a/2\, F_{BC} \sin(\vec{OB'}, \vec{F}_{BC})(-\vec{u}_z)$$

alors que l'angle entre $\vec{OA'}$ et $\vec{F}_{BC}$ est $\pi/2 + \alpha$

avec $\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos\alpha$

ce qui donne :

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_{/O} = -ab\, I\, B_y \cos\alpha\, \vec{u}_z}$$

3/ l'énergie potentielle d'un circuit parcouru par un courant I placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ est donnée par :

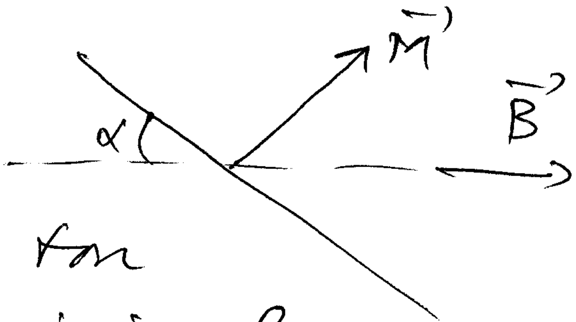
$$E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$$

où $\vec{M}$ est le moment magnétique du circuit :

$\vec{M} = I S \vec{n}$ S étant la surface du circuit et $\vec{n}$ vecteur unitaire normal à la surface du cadre.

Dans notre cas $S = ab$.

$$E_p = -M . B_y \cos(\vec{M}, \vec{B})$$
$$= -I a b B_y \cos(\pi/2 - \alpha)$$
$$= -I a b B_y \sin \alpha$$



4/ le cadre aura une position stable lorsque son énergie potentielle est minimale ; c'est à dire quand $E_p = -I a b B_y$ avec $\sin \alpha = 1$ ce qui donne $\alpha = \pi/2$.

Donc le cadre doit être dans une position telle que le vecteur $\vec{n}$ normal à sa surface soit parallèle à $\vec{B}$ (le flux du champ magnétique à travers la surface du cadre est maximal !)

M. MEBROUKI