École Préparatoire en Sciences et Techniques de Tlemcen

Département de Physique

Examen de rattrapage - Physique II

Questions de cours :

1. le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre est nul. Expliquer.
2. des charges électriques abandonnées au sein d'une sphère de rayon R se répartissent plutôt sur sa surface que de rester dans le volume. Expliquer.
3. montrer que le champ électrique créé par une charge surfacique σ répartie uniformément sur un plan supposé infini est normal à la surface du plan et que sa norme est égale à $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.
4. donner l'expression de la force appliquée par un champ électrique et un champ magnétique sur une charge q.
5. en appliquant un champ magnétique, peut-on mettre en mouvement une charge électrique initialement au repos ? Expliquer.
6. le champ électrique $\vec{E}$ créé par des charges statiques vérifie les équations suivantes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \cdot = \frac{\rho_{int}}{\epsilon_0} \qquad \text{et} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$$

alors que le champ magnétique $\vec{B}$ créé par un courant continu (ne dépendant pas du temps) vérifie les équations suivantes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{int}$$

commenter ces quatre équations et donner les formes intégrales correspondantes (faire un calcul).

7. donner l'expression de la capacité d'un condensateur cylindrique, constitué de deux cylindres conducteurs coaxiaux de rayons R_1 et R_2, de hauteurs L, portant sur leurs surfaces les charges $+Q$ et $-Q$.
8. on considère une spire (fil conducteur en forme de cercle) de rayon R parcourue par un courant continu I. Donner l'expression du champ magnétique en un point M sur l'axe des z normal à la spire et passant par son centre.

Problème

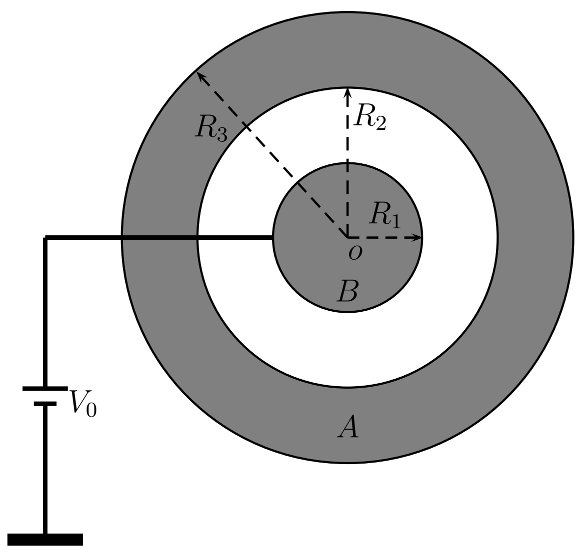
Un conducteur sphérique creux A, initialement neutre, de rayon intérieur $R_2 = 2R$ et de rayon extérieur $R_3 = 4\,R$ entoure un deuxième conducteur sphérique B, de rayon $R_1 = R$, porté à un potentiel V_0 par l'intermédiaire d'un générateur (voir figure ci-dessous). Le conducteur B porte une charge Q_0 supposée répartie uniformément sur sa surface.

1. quel type d'influence existe-t-elle entre les deux conducteurs ? Justifier.
2. quelles sont les charges portées par les surfaces intérieure et extérieure du conducteur A. Justifier.
3. donner l'expression du champ électrique E dans les quatre régions suivantes :

$$r < R, \qquad R < r < 2\,R, \qquad 2\,R < r < 4\,R, \qquad r > 4\,R$$

.

4. utiliser ce résultat pour donner l'expression de la capacité électrique de ce condensateur sphérique.
5. en considérant que V_A est le potentiel du conducteur A et sachant que le potentiel électrique est nul à l'infini, donner l'expression du potentiel électrique dans les quatre régions.
6. en déduire la charge Q_0 en fonction de R , V_0 et ϵ_0.



EPST Tlemcen. 2013-2014

Corrigé de l'examen de Rattrapage Phys02

Questions de cours : (1 pt)

(0.5) 1/ un conducteur en équilibre est défini par le fait que les charges électriques y sont immobiles. Alors que, si un champ électrique existait dans un conducteur les charges auraient été mises en mouvement; ce qui est ~~contraire~~ en contradiction avec la définition d'un conducteur en équilibre. Donc, le champ électrique au sein d'un conducteur en équilibre est nul.

(0.5) 2/ L'énergie électrostatique emmagasinée par une quantité de charge Q répartie sur la surface d'une sphère de rayon R est donnée par :

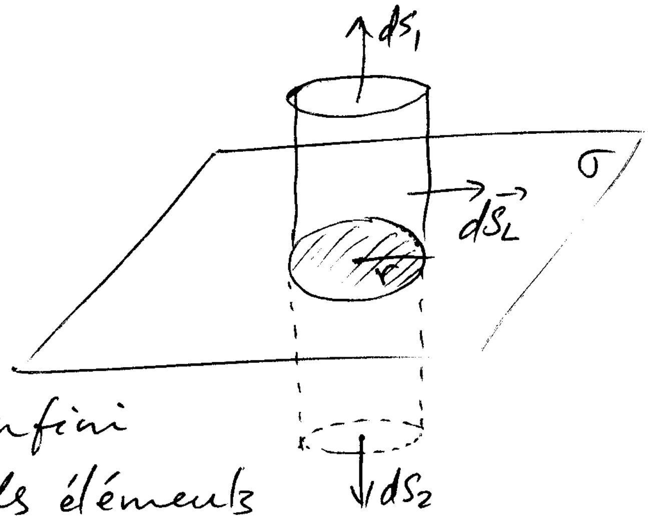
$$E_p = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R}$$

alors que celle emmagasinée par la même quantité de charge Q répartie uniformément dans le volume de la même sphère est donnée par :

$$E_p = \frac{3}{20\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R}.$$

On sait que tout système cherche à adopter la configuration qui minimise son énergie potentielle, les charges vont donc se répartir sur la surface de la sphère car c'est cette configuration qui a l'énergie minimale en la comparant avec l'énergie correspondant à une répartition dans le volume.

3/ le plan supposé infini porte une charge répartie uniformément sur sa surface.



0.25 ⊕ Puisque le plan est infini on peut toujours trouver des éléments infinitésimaux portant ~~des char~~ la même charge et créant en un point quelconque des champs électrictriques (Vecteurs $d\vec{E}$) dont les composantes horizontales s'annulent mutuellement, la seule composante qui subsiste est celle suivant la normale au plan.

0.75 ⊕ En utilisant le théorème de Gauss sur une surface cylindrique (Voir figure), on obtient:

$$\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

avec $$\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint_{S_1} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \iint_{S_L} \vec{E}\cdot\vec{dS}$$

et $Q_{int} = \sigma\pi r^2$, $S_{1,2} = \pi r^2$

puisque $\vec{E} \parallel \vec{dS_1}$ et $\vec{E} \parallel \vec{dS_2}$, $\vec{E} \perp \vec{dS_L}$

avec $\vec{E}$ ne dépendant pas de sa position sur les surfaces S_1 et S_2. On peut écrire :

$$E \iint dS_1 + E \iint dS_2 + \underbrace{\iint_{S_L} \vec{E} \cdot \vec{dS}}_{=0} = \frac{\sigma \pi r^2}{\varepsilon_0}$$

$$2 E \pi r^2 = \frac{\sigma \pi r^2}{\varepsilon_0}$$

ou encore : $$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

4/ La force appliquée par un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$ sur une charge dite force de Lorentz est donnée par :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$ 0.5

où $\vec{v}$ est la vitesse de la charge.

5/ En fait, on ne peut pas mettre en mouvement une charge ~~i~~nitialement au repos juste en appliquant un champ magnétique car la force magnétique dépend de la vitesse de la charge $\vec{F_m} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ et donc si $\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F_m} = \vec{0}$, la charge ne sentira aucune force !. 0.5

6/ a $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{int}}{\varepsilon_0}$ (théorème de Gauss).

- la divergence de champ électrique en un point est égale la densité de charge en ~~un~~ ce point (en réalité c'est un volume infinitésimal). 0.5
- intégrons sur le volume contenant la charge :

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV = \iiint \frac{\rho_{int}}{\varepsilon_0} dV = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

en utilisant le théorème de divergence, on trouve :

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS}$$ où S est la surface

délimitant le volume d'intégration, ce qui donne :

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}.$$ (forme intégrale de la loi de Gauss.) 0.5

b $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \vec{0}$

ceci est dû au fait que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ (dérive d'un potentiel) et que $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\cdot\varphi) = \vec{0}$. (résultat de l'analyse Vectorielle).
Le champ électrique trouve son origine dans une répartition de charges statiques. 0.5

Intégrant sur une ~~contour~~ surface ~~fermé~~ :

$$\iint \vec{\nabla}\wedge\vec{E}\, d\vec{S} = \int \vec{0}\cdot d\vec{S} = 0$$

et ~~en~~ utilisant le théorème de Stokes :

$$\iint \vec{\nabla}\wedge\vec{E}\cdot\vec{dS} = \boxed{\oint_C \vec{E}\cdot\vec{dl} = 0}$$ 0.5

où C est le contour fermé délimitant la surface d'intégration.

c : $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{0}$

la divergence de $\vec{B}$ en tout point de l'espace est nul (Ceci est dû au fait que $\vec{B}$ peut être écrit sous la forme $\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$ où $\vec{A}$ est un vecteur potentiel et que $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = \vec{0}$; résultat de l'analyse vectorielle). 0.5

$$\iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\, dV = 0$$

et $\oiint_S \vec{B}\cdot\vec{dS} = 0$ (théorème de divergence) 0.5

d : $\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{int}$

le rotationnel d'un champ magnétique est égal au courant continu représenté par un vecteur densité de courant $\vec{J}_{int}$ (source du champ magnétique $\vec{B}$) 0.5

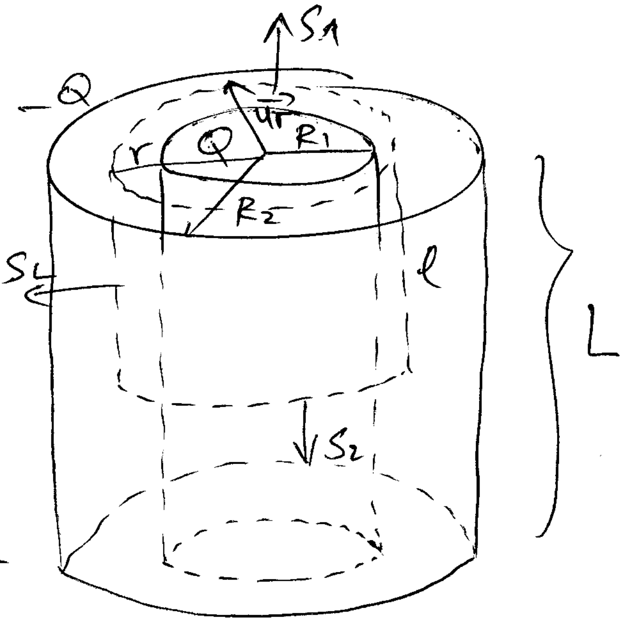
$$\iint \vec{\nabla}\wedge\vec{B}\cdot\vec{dS} = \mu_0 \iint \vec{J}_{int}\, \vec{dS} = \mu_0 I_{int}$$

$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_{int}$ (théorème de Stokes)

où C est le contour délimitant la surface d'intégration. I_{int} est le courant qui passe à travers la surface d'intégration.

0.5

7/ supposons que la longueur du cylindre L est très grand devant R_1 et R_2 de telle sorte que le cylindre est supposé de longueur infini !



Ceci a une conséquence sur le calcul ; à savoir le champ électrique est radial pointant de la surface interne de rayon R_1 vers la surface de rayon R_2.

Appliquant le théorème de Gauss à une surface cylindrique de rayon r et de longueur l (voir figure ci-dessus)

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}.$$

Supposons aussi que la charge Q est répartie uniformément sur la surface du cylindre interne.

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \underbrace{\iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{dS}}_{=0} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{dS}}_{=0} + \iint_{S_L} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

(car $\vec{E} \perp \vec{S_1}, \vec{E} \perp \vec{S_2}$)

$$\iint_{S_L} \vec{E} \cdot \vec{dS} = E\, 2\pi r l = \frac{\sigma\, 2\pi R_1 l}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R_1}{r} \quad \text{et} \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R_1}{r} \vec{u_r}$$

On sait que :

$$V(R_2)-V(R_1) = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

avec $\vec{dl} = dr\,\vec{u_r} + r\,d\theta\,\vec{u_\theta} + dz\,\vec{u_z}$ (coordonnées cylindriques)

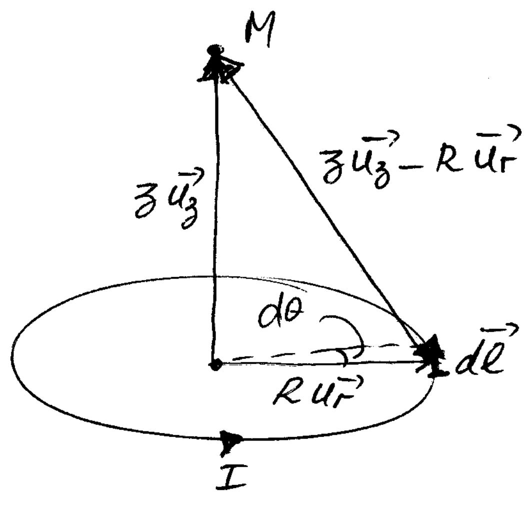
$$\vec{E}\cdot\vec{dl} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\frac{R_1}{r}\,dr$$

$$V(R_1)-V(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\frac{R_1}{r}\,dr = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

avec $Q = 2\pi R_1 L\sigma \Rightarrow \sigma = \dfrac{Q}{2\pi R_1 L}$.

Par définition, la capacité électrique est donnée par : $C = \dfrac{Q}{V(R_1)-V(R_2)} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$. 2

8/ Le champ magnétique créé en un point M sur l'axe des z par un élément de courant $I\vec{dl}$ est donné par : (Biot et Savart)



$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\vec{dl}\wedge(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$\vec{r}\,'$ est le vecteur position de l'élément du courant

$\vec{r}$ est le vecteur position du point M, donc :
$\vec{r}-\vec{r}\,' = z\vec{u_z} - R\vec{u_r}$.

et $|\vec{r}-\vec{r}'|^3 = (z^2+R^2)^{3/2}$

on a d'autre part $\vec{dl} = R d\theta \, \vec{u_\theta}$

on obtient donc :

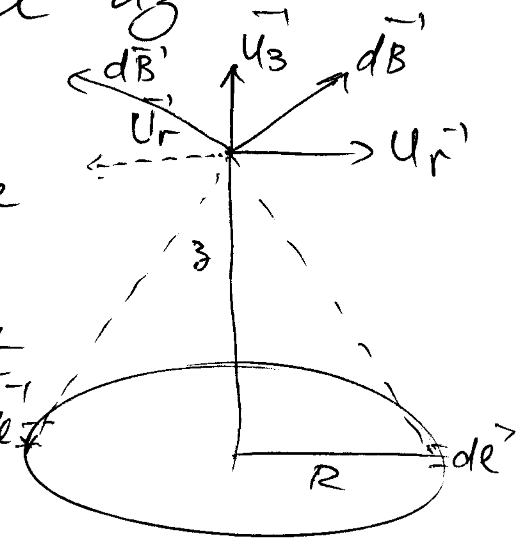
$$\vec{dB}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I R d\theta \, \vec{u_\theta} \wedge (z\vec{u_z} - R\vec{u_r})}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

avec $\vec{u_\theta} \wedge \vec{u_z} = \vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta} \wedge \vec{u_r} = -\vec{u_z}$

ce qui permet de réécrire $\vec{dB}$ sous la forme :

$$\vec{dB}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[zIRd\theta \, \vec{u_r} + IR^2 d\theta \, \vec{u_z}]}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

le champ magnétique a donc deux composantes : une composante suivant $\vec{u_z}$ et une composante suivant $\vec{u_z}$



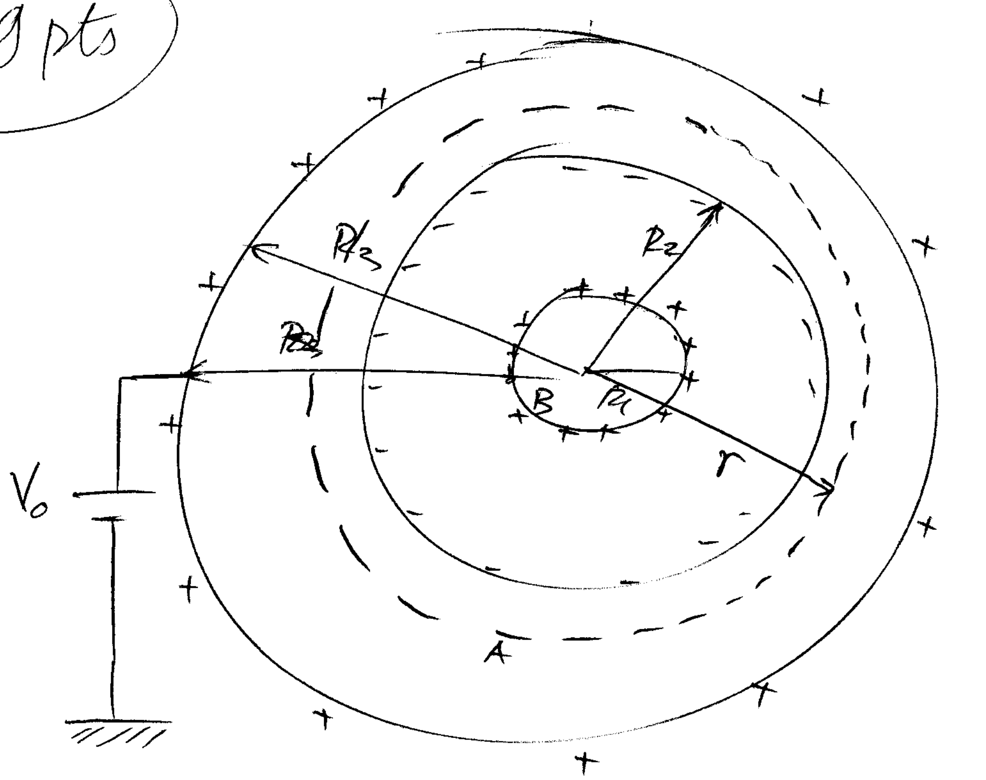
Remarquons aussi que l'intégration sur la spire toute entière donne une composante nulle suivant $\vec{u_r}$ (car on somme toutes les directions $\vec{u_r}$ sur un cercle, ce qui les annulent deux ~~pa~~ à deux)

Ce qui persiste c'est bien la composante suivant l'axe des z :

d'où : $\int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta .$

$$\boxed{\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{I R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}} \vec{u_z}}$$ 2

Problème : (09 pts)



1/ l'influence entre les deux conducteurs est totale car le conducteur A entoure complètement le conducteur B. toutes les lignes de champ électrique émanant de B aboutissent sur A.

(1)

2/ Utilisant le théorème de Gauss sur une surface sphérique de rayon r telque : $R_2 < r < R_3$ où le champ électrique est nul

(le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre est nul.)

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow Q_{int} = 0$$

mais la charge à l'intérieur de la surface choisie comprend la charge Q_0 sur B et une charge induite sur la surface interne du conducteur A ; Q_A^{int}.

d'où : $Q_0 + Q_A^{int} = Q_{int} = 0$

Ce qui donne : $\boxed{Q_A^{int} = -Q_0}$ 1

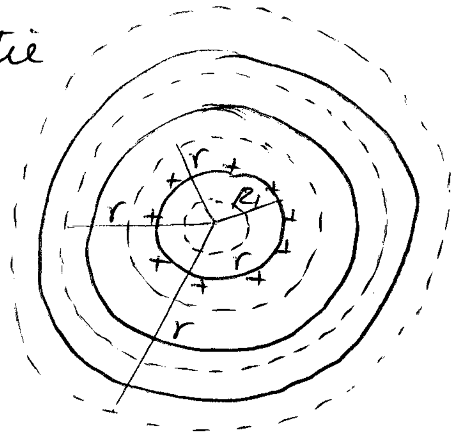
Puisque le conducteur A était initialement neutre : $Q_A^{int} + Q_A^{ext} = 0$; d'où $Q_A^{ext} = -Q_A^{int} = Q_0$.

$$\boxed{Q_A^{ext} = Q_0}$$ 1

3/ ⊗ $r < R_1$:

En utilisant le théorème de Gauss

$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$ (charge répartie sur la surface)



d'où : $E_r = 0$ 0.5

On pouvait deviner la valeur de E en remarquant que la sphère de rayon R_1 est portée à un potentiel constant $V_0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V_0 = \vec{0}$.

⊗ $R_1 \leq r \leq R_2$

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0}$$

le champ électrique est ~~par~~ radial et a une symétrie sphérique, d'où :

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint E \cdot dS = E \oiint dS = E_r \, 4\pi r^2 = \frac{Q_0}{\varepsilon_0}.$$

d'où $E_r = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$ et $\vec{E} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u_r}$.

0.5

$\circledast$ $R_2 \leq r \leq R_3$

le champ électrique est nul car le conducteur est en équilibre.
on peut aussi utiliser le théorème de Gauss, tout en remarquant que $Q_{int} = Q_0 + (-Q_0) = 0$

$$\iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}.$$ (0,5)

$\circledast$ $r > R_3$

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_0 + (-Q_0) + Q_0}{\varepsilon_0} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_0}{r^2} \vec{u_r}}$$ (0,5)

4/ Entre R_1 et R_2 on a : $\vec{E} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u_r}$

$$V(R_2) - V(R_1) = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

$$V_A - V_B = -\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2}$$

$$V_A - V_B = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right]$$

$$V_B - V_A = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right]$$

$$\boxed{C = \frac{Q_0}{V_B - V_A} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$ (1,5)

5/ ~~$R_1 < r < R_2$~~ $r < R_1$

la sphère interne est portée au potentiel V_0 constant sur toute la sphère. (0.5)

* $R_1 \leq r \leq R_2$.

on sait que $\vec{E} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$

puisque $\vec{E}$ est radial ; on a :

$$E_r = -\frac{dV(r)}{dr} \Rightarrow dV = -E_r\, dr$$

$$\int_{V_0} dV = -\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{r} \frac{dr'}{r'^2}$$

$$V(r) - V_0 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r'}\right]_{R_1}^{r} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} - \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1}$$

Au passage, et par identification, on définit

$$\boxed{V_0 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1}} \quad \text{et} \quad V(r) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \; ; R_1 \leq r \leq R_2$$

(0.5)

* $R_2 \leq r \leq R_3$

le conducteur A est porté à un potentiel V_A constant (le champ $\vec{E}$ y est nul).

En utilisant la condition aux limites, on a :

$$V_A = V(R_2) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2R}.$$ (0.5)

⊗ $r > R_3$

$$\vec{E} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{u_r} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\frac{dV}{dr}\vec{u_r}$$

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E_r\,dr.$$

$$\int_{V(r)}^{V_\infty} dV = -\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r'}\right]_r^\infty$$

$$\underbrace{V(\infty)}_{=0} - V(r) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r}\right]$$

$$\boxed{V(r) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}} \quad 0.5$$

avec $V_{\cancel{A}} = V(R_2) = V(R_3) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_3}$.

6/ on a déjà trouvé l'expression de V_0; qui était égale à : $V_0 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1}$

$Q_0 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 V_0$ avec $R_1 = R$.

d'où : $\boxed{Q_0 = 4\pi\varepsilon_0 R V_0}$ 0.5

M. MEBROUKI