École Préparatoire en Sciences et Techniques de Tlemcen

Département de Physique

Corrigé du devoir surveillé - Physique II

Questions de cours :

1. Vérifier l'égalité suivante :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

En coordonnées cartésiennes les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ s'écrivent comme

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

et

$$\vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k}$$

Commençons par calculer $\vec{B} \wedge \vec{C}$. En effet,

$$\vec{B} \wedge \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = (B_y\,C_z - B_z\,C_y)\,\vec{i} + (B_z\,C_x - B_x\,C_z)\,\vec{j} + (B_x\,C_y - B_y\,C_x)\,\vec{k}$$

Remarquez l'utilisation de la permutation circulaire des indices x, y et z dans le calcul du produit vectoriel !
De la même manière, on peut obtenir l'expression de $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$. En fait ;

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = {} & [A_y\,(B_x\,C_y - B_y\,C_x) - A_z\,(B_z\,C_x - B_x\,C_z)]\,\vec{i} \\ & + [A_z\,(B_y\,C_z - B_z\,C_y) - A_x\,(B_x\,C_y - B_y\,C_x)]\,\vec{j} \\ & + [A_x\,(B_z\,C_x - B_x\,C_z) - A_y\,(B_y\,C_z - B_z\,C_y)]\,\vec{k} \end{aligned}$$

ou encore

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = [A_yB_x\,C_y - A_yB_y\,C_x - A_zB_z\,C_x - A_zB_x\,C_z]\,\vec{i}$$

$$+\left[A_z B_y\, C_z - A_z B_z\, C_y - A_x B_x\, C_y - A_x B_y\, C_x\right]\vec{j}$$
$$+\left[A_x B_z\, C_x - A_x B_x\, C_z - A_y B_y\, C_z - A_y B_z\, C_y\right]\vec{k}$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \left[B_x\,(A_y\,C_y + A_z\,C_z) - C_x\,(A_y\,B_y + A_z\,B_z)\right]\vec{i}$$
$$+\left[B_y\,(A_x\,C_x + A_z\,C_z) - C_y\,(A_x\,B_x + A_z\,B_z)\right]\vec{j}$$
$$+\left[B_z\,(A_x\,C_x + A_y\,C_y) - C_z\,(A_x\,B_x + A_y\,B_y)\right]\vec{k}$$

ou encore

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) =$$
$$\left[B_x\,(A_x\,C_x + A_y\,C_y + A_z\,C_z) - B_x A_x\,C_x - C_x\,(A_x\,B_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z) + B_x A_x\,C_x\right]\vec{i}$$
$$+\left[B_y\,(A_x\,C_x + A_y\,C_y + A_z\,C_z) - B_y A_y\,C_y - C_y\,(A_x\,B_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z) + B_y A_y\,C_y\right]\vec{j}$$
$$+\left[B_z\,(A_x\,C_x + A_y\,C_y + A_z\,C_z) - B_z A_z\,C_z - C_z\,(A_x\,B_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z) + B_z A_z\,C_z\right]\vec{k}$$

ce qui donne

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \left[B_x\,(A_x\,C_x + A_y\,C_y + A_z\,C_z) - C_x\,(A_x\,B_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z)\right]\vec{i}$$
$$+\left[B_y\,(A_x\,C_x + A_y\,C_y + A_z\,C_z) - C_y\,(A_x\,B_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z)\right]\vec{j}$$
$$+\left[B_z\,(A_x\,C_x + A_y\,C_y + A_z\,C_z) - C_z\,(A_x\,B_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z)\right]\vec{k}$$

ou encore

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \left[B_x\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right) - C_x\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\right]\vec{i}$$
$$+\left[B_y\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right) - C_y\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\right]\vec{j}$$
$$+\left[B_z\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right) - C_z\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\right]\vec{k}$$

qui peut se mettre sous une forme plus compacte :

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$$

On peut aussi démontrer l'égalité ci-dessus de la manière suivante :
Construisons un trièdre direct composé de trois vecteurs unitaires orthonormés (voir figure 1), avec :

$$\vec{v} = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|}, \quad \vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{u} = \vec{v}\wedge\vec{w} = \vec{v}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})$$

Les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ s'écrivent dans cette base comme :

$$\vec{A} = A_u\vec{u} + A_v\vec{v} + A_w\vec{w}, \qquad \vec{B} = B_u\vec{u} + B_v\vec{v} \qquad \text{et} \qquad \vec{C} = C_v\vec{v}$$

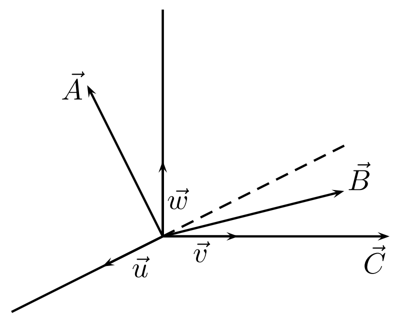


FIGURE 1 – Disposition des vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ dans l'espace.

où on a supposé que les vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont dans le plan dont la normale est suivant $\vec{w}$.
Nous avons donc

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{A}\wedge(B_u\vec{u}\wedge C_v\vec{v}) = B_u\,C_v\vec{A}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v}) \quad \text{car} \quad \vec{v}\wedge\vec{v}=\vec{0}$$

avec

$$\vec{A}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v}) = (A_u\vec{u}+A_v\vec{v}+A_w\vec{w})\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v}) = A_u\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})+A_v\vec{v}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})+A_w\vec{w}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})$$

Remarquons que $\vec{w}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\vec{0}$ car $\vec{w}$ est colinéaire (sur la même droite) à $\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})$; ce qui donne

$$\vec{A}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v}) = A_u\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})+A_v\vec{v}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})$$

L'expression du double produit vectoriel devient

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = B_u\,C_v\,A_u\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})+B_u\,C_v\,A_v\vec{v}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})$$

Remarquons aussi que

$$\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v}) = -\vec{v} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\vec{u}$$

d'où

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = -B_u\,A_u\,C_v\vec{v}+C_v\,A_v\,B_u\vec{u}$$

ou encore

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = -B_u\,A_u\vec{C}+C_v\,A_v(\vec{B}-B_v\vec{v})$$

où on a remplacé $B_u\vec{u}$ par $\vec{B}-B_v\vec{v}$.
L'expression ci-dessus devient donc

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = C_v\,A_v\vec{B}-B_u\,A_u\vec{C}-C_v\,A_vB_v\vec{v}$$

ou encore

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = C_v\,A_v\vec{B}-(B_u\,A_u+A_vB_v)\vec{C}$$

A partir des expressions des vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$, il est clair que

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = A_v\, C_v \quad \text{et} \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = B_u\, A_u + A_v B_v$$

d'où

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

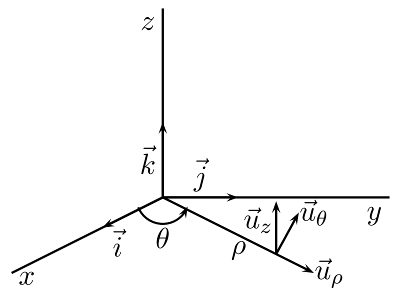


FIGURE 2 – Disposition des vecteurs unitaires $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$ par rapport au système de coordonnées cartésiennes

2. Décomposons les vecteurs unitaires en coordonnées cartésiennes $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sur la base des vecteurs unitaires en coordonnées cylindriques $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$:

$$\begin{cases} \vec{i} = i_\rho \vec{u}_\rho + i_\theta \vec{u}_\theta + i_z \vec{u}_z \\ \vec{j} = j_\rho \vec{u}_\rho + j_\theta \vec{u}_\theta + j_z \vec{u}_z \\ \vec{k} = k_\rho \vec{u}_\rho + k_\theta \vec{u}_\theta + k_z \vec{u}_z \end{cases}$$

i_ρ, i_θ et i_z étant les composantes du vecteurs $\vec{i}$ dans la base ($\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$) ; j_ρ, j_θ et j_z les composantes du vecteurs $\vec{j}$ dans la base ($\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$) et k_ρ, k_θ et k_z les composantes du vecteurs $\vec{k}$ dans la base ($\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$).
Pour obtenir la composante i_ρ, il suffit de faire le produit scalaire $\vec{u}_\rho \cdot \vec{i}$:

$$\vec{u}_\rho \cdot \vec{i} = i_\rho\, \vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_\rho + i_\theta\, \vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_\theta + i_z\, \vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_z$$

Tout en remarquant que les vecteurs unitaires $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$ forment un trièdre direct, c'est à dire que

$$\vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_\rho = 1, \qquad \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_\theta = 1, \qquad \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z = 1, \qquad \vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_\theta = 0, \qquad \vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_z = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_z = 0 :$$

il vient que

$$\vec{u}_\rho \cdot \vec{i} = i_\rho$$

A partir des expressions des vecteurs unitaires

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \\ \vec{u}_z = \vec{k} \end{cases}$$

il est clair que

$$i_\rho = \vec{u}_\rho \cdot \vec{i} = \cos\theta$$

En procédant de la même manière, on peut trouver les autres composantes de $\vec{i}$, soit :

$$i_\theta = \vec{u}_\theta \cdot \vec{i} = -\sin\theta \qquad \text{et} \qquad i_z = \vec{u}_z \cdot \vec{i} = 0;$$

les composantes du vecteur $\vec{j}$:

$$j_\rho = \vec{u}_\rho \cdot \vec{j} = \sin\theta, \qquad j_\theta = \vec{u}_\theta \cdot \vec{j} = \cos\theta \qquad \text{et} \qquad j_z = \vec{u}_z \cdot \vec{j} = 0$$

et les composantes du vecteur $\vec{k}$:

$$k_\rho = \vec{u}_\rho \cdot \vec{k} = 0, \qquad k_\theta = \vec{u}_\theta \cdot \vec{k} = 0 \qquad \text{et} \qquad k_z = \vec{u}_z \cdot \vec{k} = 1$$

Enfin, les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos\theta\,\vec{u}_\rho - \sin\theta\,\vec{u}_\theta \\ \vec{j} = \sin\theta\,\vec{u}_\rho + \cos\theta\,\vec{u}_\theta \\ \vec{k} = \vec{u}_z \end{cases}$$

Remarquons que θ est l'angle entre le vecteur $\vec{u}_\rho$ et l'axe des x.

3. La direction de la variation maximale d'une fonction $f(x, y, z)$ en un point de l'espace est donnée par le vecteur (unitaire) gradient de cette même fonction en ce point ; soit, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{k}$$

Dans notre cas

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = 2\,x\,\vec{i} + 2\,y\,\vec{j} + 2\,z\,\vec{k}$$

Au point $(1, 1, 1)$, le vecteur $\vec{\nabla} f(x, y, z)$ est donné par

$$\vec{\nabla} f = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$$

d'où la direction de la variation maximale en $(1, 1, 1)$ est donnée par le vecteur unitaire :

$$\frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{k}$$

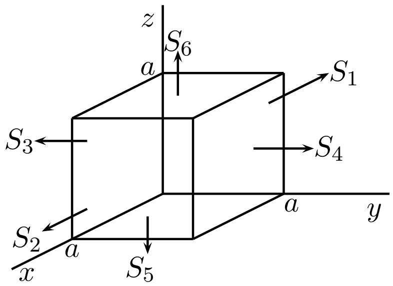


FIGURE 3 – Cube d'arête a avec ses 6 faces

4. Le théorème de divergence s'énonce comme suit :

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV;$$

Calculons l'intégrale dans le second terme, à savoir :

$$\iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV \quad \text{ou encore en coordonnée cartésiennes} \quad \int dx\int dy\int dz\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

On sait que

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}) = \frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

En choisissant un cube d'arête a dont l'une des sommets est l'origine du système d'axe (voir figure 3), il vient que

$$\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a dz\,3 = 3\,a^3$$

Pour le calcul de l'intégrale du membre à gauche de l'équation, on doit noter que la surface fermée délimitant le volume d'un cube d'arête a contient six 06 faces, à savoir

S_1 est la surface de la face dans le plan yz en $x=0$

S_2 est la surface de la face dans le plan yz en $x=a$

S_3 est la surface de la face dans le plan xz en $y=0$

S_4 est la surface de la face dans le plan xz en $y=a$

S_5 est la surface de la face dans le plan xy en $z=0$

S_6 est la surface de la face dans le plan xy en $z=a$

de telle sorte que

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1}\vec{A}\cdot d\vec{S}+\iint_{S_1}\vec{A}\cdot d\vec{S}+\iint_{S_3}\vec{A}\cdot d\vec{S}+\iint_{S_4}\vec{A}\cdot d\vec{S}+\iint_{S_5}\vec{A}\cdot d\vec{S}+\iint_{S_6}\vec{A}\cdot d\vec{S}$$

avec

$$\iint_{S_1} \vec{A}\cdot d\vec{S} = (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k})\cdot(dy\,dz[-\vec{i}]) = -\int_0^a dy \int_0^a dz\,x = 0 \quad \text{car} \quad x = 0,$$

$$\iint_{S_2} \vec{A}\cdot d\vec{S} = (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k})\cdot(dy\,dz[\vec{i}]) = \int_0^a dy \int_0^a dz\,x = a^3 \quad \text{car} \quad x = a,$$

$$\iint_{S_3} \vec{A}\cdot d\vec{S} = (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k})\cdot(dx\,dz[-\vec{j}]) = -\int_0^a dx \int_0^a dz\,y = 0 \quad \text{car} \quad y = 0,$$

$$\iint_{S_4} \vec{A}\cdot d\vec{S} = (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k})\cdot(dx\,dz[\vec{j}]) = \int_0^a dx \int_0^a dz\,y = a^3 \quad \text{car} \quad y = a,$$

$$\iint_{S_5} \vec{A}\cdot d\vec{S} = (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k})\cdot(dx\,dy[-\vec{k}]) = -\int_0^a dx \int_0^a dy\,z = 0 \quad \text{car} \quad z = 0,$$

et

$$\iint_{S_6} \vec{A}\cdot d\vec{S} = (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k})\cdot(dx\,dy[\vec{k}]) = \int_0^a dx \int_0^a dy\,z = a^3 \quad \text{car} \quad z = a$$

La somme des six intégrales donne

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = 3\,a^3 = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV;$$

Le théorème de divergence est donc vérifiée.

5. Selon Coulomb, une charge électrique q_1 placée en $\vec{r}_1$ exerce sur une charge q_2 placée en $\vec{r}_2$ une force électrique dont l'expression est donnée sous la forme

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1\,q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}\vec{u}_{1\to 2}$$

où ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide, $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ la distance entre les charges, et $\vec{u}_{1\to 2}$ vecteur unitaire allant de q_1 vers q_2, égal à $\vec{u}_{1\to 2} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$.
L'expression de la force ci-dessus devient :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1\,q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Remarquons que la force $\vec{F}_{1/2}$ est dans la même direction que $\vec{u}_{1\to 2}$ si q_1 et q_2 sont de même polarité (soit les deux charges sont positives soit les deux charges sont négatives), alors que cette même force est dans la direction opposée que $\vec{u}_{1\to 2}$ si q_1 et q_2 étaient de polarités différentes (une charge est positive et l'autre est négative).

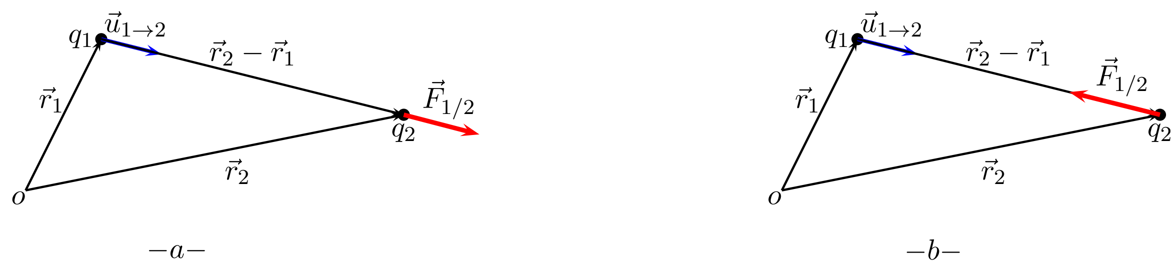


FIGURE 4 – Force appliquée par une charge q_1 en $\vec{r}_1$ sur une charge q_2 en $\vec{r}_2$:*a*- cas de deux charges de même polarité, *b*- cas de deux charges de polarités différentes.

6. Les charges doivent être statiques (fixes ou immobiles) pour qu'on puisse appliquer la loi de Coulomb ; c'est pour cela qu'on appelle électrostatique la branche de la physique qui traite du comportement des charges fixes, où on fait intervenir la loi de Coulomb. Les charges accélérées créent des champs en $\frac{1}{r}$ au lieu de $\frac{1}{r^2}$; c'est le phénomène de rayonnement, où on fait intervenir des champs électriques qui varient dans le temps (Électromagnétisme). Dans ce cas, la loi de Coulomb n'est plus valable.
7. Selon le principe de superposition, le champ électrique créé en un point de l'espace par un ensemble de charges est la somme vectorielle des champs électriques créés séparément par chacune des charges de l'ensemble. Ce principe n'est pas évident, comme il peut prêter à penser, mais il est expérimentalement vérifié.
8. Le champ électrique créé par une charge électrique positive est :
   (a) radial : le vecteur du champ électrique est porté par la droite reliant la position de la charge q et le point ou l'on veut mesurer le champ électrique.
   (b) divergent : par convention, la direction du vecteur du champ électrique pointe de la charge vers l'espace.
   (c) symétrie sphérique : la norme du vecteur électrique est la même sur la surface d'une sphère de rayon r dont le centre est la position de la charge (voir figure 5).

EXERCICE 01 :

On donne la fonction $U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

1. le champ $\vec{E}$ qui dérive de la fonction U est donné, en coordonnées cartésiennes, par

$$\vec{E} = \vec{\nabla}\, U(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = 2\,x\vec{i} + 2\,y\vec{j} + 2\,z\vec{k}$$

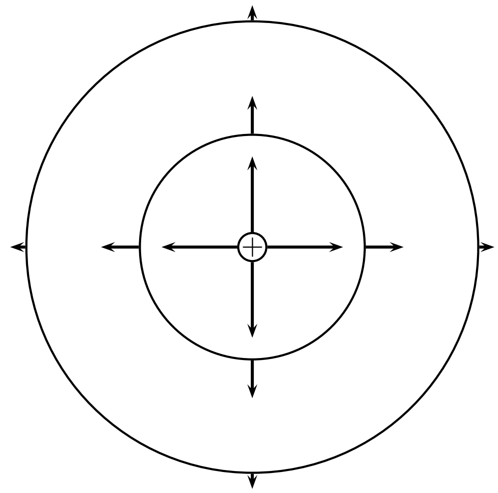


Figure 5 – Variation du champ électrique créé par une charge positif. L'échelle utilisée ne reflète pas la variation en $\frac{1}{r^2}$ du champ électrique.

2.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(2z)}{\partial y} - \frac{\partial(2y)}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial(2z)}{\partial x} - \frac{\partial(2x)}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(2y)}{\partial x} - \frac{\partial(2x)}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}$$

Ceci est un résultat général : le rotationnel d'un gradient est toujours nul ($\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} U) = \vec{0}$).

3. la circulation de $\vec{E}$ le long du contour triangulaire $OABO$, représenté sur la figure 6, est donné par :

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int\limits_{OA} \vec{E} \cdot \vec{dl} + \int\limits_{AB} \vec{E} \cdot \vec{dl} + \int\limits_{BO} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

avec

$$\int\limits_{OA} \vec{E} \cdot dy\vec{j} = \int\limits_0^1 \vec{E} \cdot dy\vec{j} = \int\limits_0^1 (2\,x\vec{i} + 2\,y\vec{j} + 2\,z\vec{k}) \cdot (dy\vec{j}) = \int\limits_0^1 2\,y\,dy = \left[y^2\right]_0^1 = 1,$$

$$\int\limits_{AB} \vec{E} \cdot dy\vec{j} = \int\limits_{AB} \vec{E} \cdot (dy\vec{j} + dz\vec{k}) = \int\limits_1^0 2\,ydy + \int\limits_0^1 2\,zdz = \left[y^2\right]_0^1 + \left[z^2\right]_0^1 = -1 + 1 = 0$$

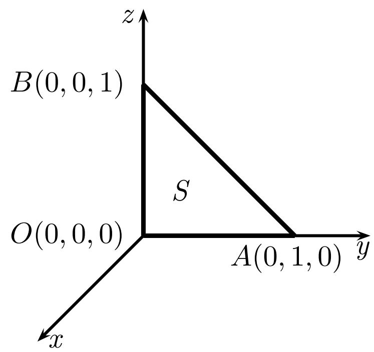


FIGURE 6 – Surface triangulaire S dans le plan yz ($x = 0$) délimitée par le contour fermé $OABO$

et

$$\int_{BO} \vec{E} \cdot dz\vec{k} = \int_1^0 \vec{E} \cdot dz\vec{k} = \int_1^0 (2\,x\vec{i} + 2\,y\vec{j} + 2\,z\vec{k}) \cdot (dz\vec{k}) = \int_1^0 2\,z\,dy = \left[z^2\right]_1^0 = -1.$$

La somme des trois intégrales donne bien

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$$

Ceci est un résultat général, à savoir : la circulation le long d'un contour fermé d'un vecteur dérivant d'une fonction est toujours nulle ($\oint \vec{\nabla U} \cdot \vec{dl} = 0$)

4. le flux Φ du champ $\vec{E}$ qui sort de la surface S délimitée par le contour $OABO$ (voir figure 6) est donné par :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

avec $\vec{E}(x, y, z) = 2\,x\vec{i} + 2\,y\vec{j} + 2\,z\vec{k}$ et $\vec{dS} = dS\,\vec{i} = dy\,dz\,\vec{i}$, où on a choisi la norme de la surface suivant la direction positive. Ce qui donne

$$\Phi = \int_0^1 dy \int_0^{-y+1} dz(2\,x\vec{i} + 2\,y\vec{j} + 2\,z\vec{k}) \cdot (dy\,dz\,\vec{i}) = \int_0^1 dy \int_0^{-y+1} dz\,(2\,x) = 0$$

car $x = 0$ partout sur la surface considérée. Remarquons que la borne supérieure de l'intégrale sur z est bien $-y + 1$, qui est l'équation de la droite entre A et B. Si cette borne était égale à 1, l'intégrale serait sur la surface d'un carré !

5. Rappelons les résultats qu'on vient d'obtenir :

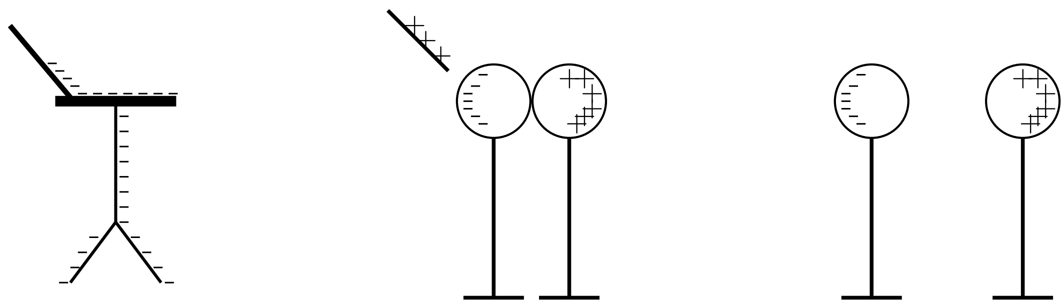
$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$$

et
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$$
ce qui nous permet d'écrire
$$\iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$
On vient de vérifier le théorème de Stokes exprimée sous la forme
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \cdot d\vec{S}$$
sur le cas d'un vecteur dérivant d'un potentiel sur un contour donné.

Exercice 02 :

1. En frottant une tige en verre avec de la fourrure, celle-là va se charger soit négativement (en recevant un surplus de charges négatives de la fourrure) soit positivement (en cédant des charges électriques à la fourrure). En mettant la tige en contact avec le plateau conducteur, les charges négatives- par exemple- vont se déplacer (transfert de charges) vers le plateau et de là vers les feuilles conductrices à travers le fil conducteur (les charges électriques dans un conducteur ont une grande mobilité). Les feuilles auront donc un surplus de charges négatives sur leurs surfaces. Les charges négatives (de même polarité) se repoussent, créant ainsi une force mécanique qui fait que les feuilles, par leur légèreté, s'écartent. Une schématisation de la situation physique est représentée sur la figure 7.a.
   En effet, le plateau, le fil conducteur et les deux feuilles constituent un seul système isolé, qui, une fois mis en contact avec la tige chargée, reçoit des charges négatives qui vont se répartir sur toutes ces parties ; puisque c'est cette répartition qui va accomplir l'état d'équilibre que chaque système isolé veut en arriver. Dans le cas où la tige en verre se charge positivement, des charges négatives vont se déplacer des feuilles à travers le fil conducteur vers le plateau et de là vers la tige, laissant ainsi un manque de charges négatives sur les feuilles ; celles-ci deviennent chargées positivement, et se repoussent aussi.
2. En remplaçant le fil conducteur par un autre isolant, il n' y a aucune possibilité pour les charges de passer du plateau vers les feuilles ou l'inverse, car les électrons dans un isolant sont fortement liés aux atomes (mobilité très faible), contrairement à un conducteur où les électrons de valence (couches supérieures) sont libres de se mouvoir dans le matériau.
3. Si on approche une tige en plastique chargée, par exemple, positivement de deux boules métalliques mises en contact entre elles, des charges négatives dans les deux boules (un seul système à cause du contact) vont se rapprocher de la tige, car attirées par les charges positives sur la tige, laissant derrière elles des régions qui manquent de charges négatives, donc chargées positivement (phénomène d'induction). Par conséquent, la boule à gauche (la plus proche de la tige) sera chargée négativement, alors que celle à droite sera chargée positivement, avec un surplus égal de charges (voir figure 7.b).
4. Une fois les boules écartées, on obtient un système avec deux boules : l'une chargée positivement et l'autre chargée négativement en quantité de charges égales. On vient de fabriquer un dipôle électrique(deux charges de polarités différentes) (voir figure 7.c).

5. On met en contact la boule métallique à gauche en contact avec le plateau de l'électroscope, les feuilles de l'électroscope vont s'écarter puisque des charges négatives transférées depuis la boule s'y installent. Maintenant, si on met en contact la boule à droite avec l'électroscope dont les feuilles sont déjà chargées négativement, celles-ci reviennent à leurs positions initiales car les charges négatives des feuilles sont attirées par les charges positives de la boule. La force de répulsion n'existe plus entre les deux feuilles de l'électroscope.



−*a*− −*b*− −*c*−

FIGURE 7 – a- écartement des deux feuilles de l'électroscope car chargées négativement, b- phénomène d'induction par une tige chargée, c- dipôle électrique créé par induction électrique