EXAMEN FINAL

Module **: Vibrations et Ondes mécanique**
Durée **: 2 Heures.**

NB :

- Le sujet d'examen contient deux problèmes sur 10pts.
- Chaque problème doit être traité sur des feuilles d'examens séparées

Problème 1 :« 10pts »

Partie A : Dans tout le problème on considère une corde homogène vibrant transversalement dans le plan Oxy. L'équation du mouvement est de la forme $y = f(x,t)$. Soient T et μ la tension et la masse linéique de la corde à l'équilibre, respectivement**.** On définit k le nombre d'onde de cette onde.

On appelle $y(x,t)$ le déplacement transversale d'un morceau de la corde situé en x à l'instant t. On donne l'équation de propagation de l'onde de d'Alembert sous la forme:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- En déduire la vitesse de propagation des ondes « Célérité » c.

On applique un ébranlement de type sinusoïdal.

- Déterminer les solutions de l'équation de propagation en utilisant la méthode de séparation des variables.

Maintenant la corde de longueur L fixée par les deux extrémités est lâchée sans vitesse initiale.

- Déterminer la forme de la solution générale.
- Montrer que les fréquences de vibration de la corde sont des multiples entiers d'une fréquence fondamentale f_1.

La corde est excitée par un vibreur du mouvement $y(t, x=0) = a\cos\omega t$ à l'extrémité $x=0$.

- En utilisant les nouvelles conditions aux limites, montrer que la solution finale s'écrit comme suit: $y(t,x) = \frac{a}{\sin(kL)} \cos(\omega t) \sin(kL - kx)$
- Que se passe-t-il lorsque $\omega = \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$ **?**
- Comment se nomme ce phénomène ?

***Partie B* :** On considère maintenant deux cordes, de même tension linéique T et de masses linéiques μ_1 et μ_2, et attachées à la jonction « O » en $x=0$ pour former une longue corde tendue horizontalement suivant l'axe Ox**.** Une onde incidente sinusoïdale transversale de faible amplitude A_i et venant de la gauche (région $x<0$) de la forme: $y_i(x,t) = A_i \cos(\omega t - k_1 x)$ **.**

A la jonction O il y a une onde réfléchie dans la région $x<0$ et une onde transmise vers la région $x>0$. On définit k_1 et k_2 respectivement comme étant les vecteurs d'ondes dans les régions $x<0$ et $x>0$:

- Exprimer les deux équations de continuité au niveau de la jonction O qui donnent deux relations reliant les amplitudes A_i, A_t, A_r au rapport $\frac{k_1}{k_2}$.
- En déduire les coefficients de réflexion $r = \frac{A_r}{A_i}$ et de transmission $t = \frac{A_t}{A_i}$ pour l'amplitude en fonction de k_1 et k_2, puis en fonction de μ_1 et μ_2. Commenter.

<u>Problème 2 :« 10pts »</u>

Partie A : Soit une masse $m = 0.1 kg$, attachée horizontalement à un ressort de constante de raideur $k = 8.1 N/m$ et soumise à une force de frottement de type visqueux de coefficient de frottement $\alpha = 0.8 kg/s$, se déplaçant horizontalement sur une droite. On applique une force sinusoïdale dans le sens du mouvement de la masse sous la forme suivante : $F(t) = \cos(7t)$

- Ecrire l'équation différentielle de mouvement de la masse.

- Ecrire l'expression de la solution générale. (Sans préciser les expressions de l'amplitude et de la phase).
- La masse oscillera-t-elle à la résonance ? Expliquer.
- Calculer dans ce cas la valeur de l'amplitude de la vitesse du mouvement de la masse.
- En déduire la valeur maximale (dans le temps) de la puissance dissipée.

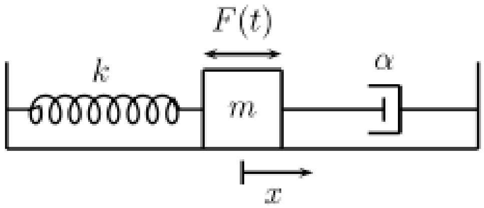


Figure 1

Partie B : Considérons le système constitue de deux masses m_1 et m_2, attachées par deux ressorts de raideur k_1 et k_2, pouvant se déplacer, sans frottement, sur une droite, (voir la figure 2.)

- Donner les expressions des énergies cinétique et potentielle du système.
- En déduire le Lagrangien du système
- Ecrire le système d'équations différentielles régissant le mouvement des masses.
- Calculer les pulsations propres du système dans le cas ou : $m_1 = m_2 = 0.1 kg$
  Et $k_1 = k_2 = 10 \, N/m$.
- Déterminer dans ce cas les modes propres du mouvement du système et écrire les solutions générales.

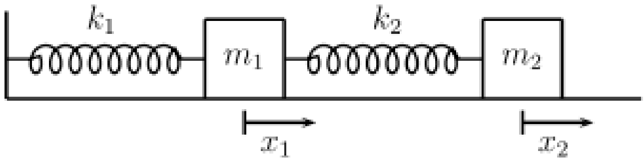


Figure 2

On applique sur la masse m_1 une force sinusoïdale de la forme : $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$

- Ecrire le nouveau système d'équations différentielles régissant le mouvement des masses.

- Pour quelle valeur de pulsation extérieure la masse m_1 sera immobile dans le régime permanent ? (Utiliser les valeurs : $m_1 = m_2 = 0.1\,kg$ et $k_1 = k_2 = 10\,N/m$).
- Ecrire l'expression de l'impédance d'entrée : $Z_e = \frac{F(t)}{\dot{x}_1(t)}$
- Donner le schéma électrique analogue au système mécanique étudié.

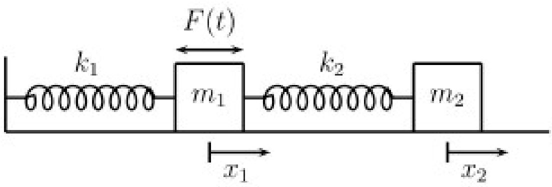


Figure 3

BONNE CHANCE

CORRECTION DE L'EXAMEN FINAL

Module **: Vibrations et Ondes mécanique**

PROBLEME 1 : 10 PTS

PARTIE A

1-L'équation de propagation aux dérivées partielles s'écrit :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- la célérité de l'onde est égale :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

2-Les solutions de l'équation de propagation de l'onde libre :

- En utilisant la méthode des séparations des variables

$$y = A(x)T(t)$$

- On obtient :

$$c^2\frac{\ddot{A}(x)}{A(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2$$

D'où la solution s'écrit comme suit :

$$\begin{array}{l} A(x) = A_1\cos\frac{\omega}{c}x + A_2\sin\frac{\omega}{c}x \\ T(t) = T_1\cos\omega t + T_2\sin\omega t \end{array} \quad \Rightarrow \quad y(x,t) = A(x)T(t)$$

- La corde est maintenant fixée :
  - les conditions aux limites nous donnent :

$$\begin{array}{l} y(x=0)=0 \\ y(x=L)=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A_1 = 0 \\ A(x) = A_2\sin k_x x \end{array} \Rightarrow \quad k_x^{(n)} = \left(\frac{\omega}{c}\right)_x = \frac{n\pi}{L}$$

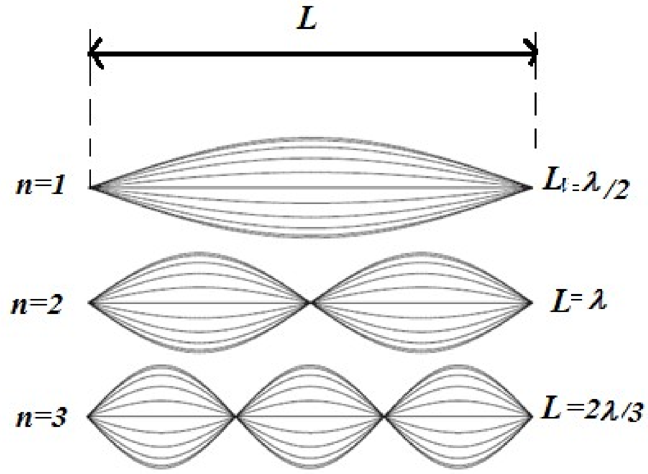
La solution s'écrit sous la forme :

$$A(x) = A_2 \sin k_x^{(n)} x$$

Les longueurs d'ondes associées aux modes propres sont :

$$k_x^{(n)} = \frac{2\pi}{\lambda} = (\frac{\omega}{c})_x = \frac{n\pi}{L} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2L}{n}$$

La figure ci-dessus, illustre les différents types des modes propres :



Modes propres

- Les conditions initiales nous donnent :

$$\dot{T}(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 0 \quad donc \quad T(t) = T_1 \cos \omega_n t$$

D'où, la solution finale s'écrit :

$$y_T(x,t) = \sum_{n \geq 1} \Lambda \sin k_x^{(n)} x \cos \omega_n t \; avec \quad \Lambda = A_2 T_1$$

- Les fréquences propres des vibrations de la corde :

$$k_x^{(n)} = \frac{\omega_n}{c} = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \quad \omega_n = n\omega_1 \; avec \quad \omega_1 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

- En régime forcé la solution de l'équation :

$$y(x,t) = A(x)T(t) = A_0 \cos(kx + \phi)[T_1 \cos \omega t + T_2 \sin \omega t]$$

En appliquant les nouvelles conditions aux limites :

$$\begin{cases} y(x=0) = a \cos \omega t \\ y(x=L) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = A_0 T_1 \cos\phi \\ 0 = T(t)\cos(kL + \phi) \end{cases} \quad avec \quad \begin{matrix} A_0 T_1 = A \\ T_2 = 0 \end{matrix}$$

On déduit :

$$\begin{cases} A = \dfrac{a}{\cos\phi} \\ \cos(kL + \phi) = 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} A = \dfrac{a}{\cos\phi} \\ \cos(kL+\phi) = \cos[(\dfrac{2n+1}{2})\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{a}{\cos\phi} \\ kL+\phi = n\pi + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} A = \dfrac{a}{\cos\phi} \\ \phi = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - kL \end{cases}$$

On remplace dans la solution ; et on obtient le résultat suivant :

$$y(x,t) = A(x)T(t) = A\cos(kx+\phi)\cos\omega t = \frac{a}{\cos\phi}\cos\omega t\cos(kx+n\pi+\frac{\pi}{2}-kL)$$

D'ou :

$$y(x,t) = \frac{a}{\sin(KL-n\pi)}\cos\omega t\sin(-kx-n\pi+kL)$$

Alors la solution finale s'écrit comme suit :

$$y(x,t) = \frac{a}{\sin(KL)}\cos\omega t\sin(k(L-x))$$

On a :

$$pour \quad \sin(KL) = 0 \quad \Rightarrow \sin(KL) = \sin n\pi \quad \Rightarrow \quad KL = n\pi$$

Finalement on obtient les pulsations quantifiées :

$$K^{(n)} = \frac{\omega_n}{c} = \frac{n\pi}{L} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

$$Pour \qquad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \Rightarrow \quad y(x,t) \to \propto$$

Ce phénomène est appelé la résonance

PARTIE B

- Les deux équations de continuité :

En appliquant les deux équations de continuités :

$$\begin{cases} y_i(0,t) + y_r(0,t) = y_t(0,t) \\ \left[\dfrac{\partial y_i(x,t)}{\partial x}\right]_{x=0} + \left[\dfrac{\partial y_r(x,t)}{\partial x}\right]_{x=0} = \left[\dfrac{\partial y_t(x,t)}{\partial x}\right]_{x=0} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} a_i + a_r = a_t \\ a_i - a_r = \dfrac{k_2}{k_1} a_t \end{cases}$$

- Les coefficients de réflexion et de transmission sont définit :

$$R = \frac{a_r}{a_i}$$
$$T = \frac{a_t}{a_i}$$

Après calcul, On obtient :

$$R = \frac{k_{01} - k_{02}}{k_{01} + k_{02}} \Rightarrow \quad R = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$
$$T = \frac{2k_{01}}{k_{01} + k_{02}} \Rightarrow \quad T = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

❖ Commentaires :

$$\begin{matrix} \mu_1 \succ \mu_2 & \Rightarrow & R \succ 0 \\ \mu_1 \prec \mu_2 & \Rightarrow & R \prec 0 \end{matrix} \; et \; \begin{matrix} \mu_1 \succ \mu_2 \\ \mu_1 \prec \mu_2 \end{matrix} \Rightarrow \quad T \succ 0$$

PROBLEME 2 : 10 PTS

- L'équation différentielle du mouvement

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F(t)$$

Application numérique :

$$0.1\ddot{x} + 0.8\dot{x} + 8.1x = \cos(7t)$$

Ou encore

$$\ddot{x} + 8.0\dot{x} + 81.0x = 10\cos(7t)$$

- La solution générale est la somme d'une solution sans second membre et une solution particulière :

$$x(t) = x_{SSSM}(t) + x_p(t)$$

- Pour la solution sans second membre, on a :

✓ Le facteur d'amortissement

$$\gamma = \frac{\alpha}{2m} = \frac{0.8}{0.2} = 4s^{-1}$$

✓

- ✓ La pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{8.1}{0.1}} = 9 \text{ rad. } s^{-1} \quad \text{Donc } \gamma < \omega_0$$

Avec la pseudo pulsation :

$$\omega_a = \sqrt{81-16} = 8.06 \text{rad s}^{-1}$$

La solution sans second membre s'écrit donc :

$$x_{SSSM}(t) = Ce^{-4t}\cos(8.06t+\theta)$$

La solution particulière s'écrit sous la forme

$$x_p(t) = A\cos(t+\varphi)$$

- La solution générale s'écrit donc :

$$x(t) = Ce^{-4t}\cos(8.06t+\theta) + A\cos(t+\varphi)$$

  - La pulsation de résonance du système est donnée par :

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{81-32} = 7 \text{rad s}^{-1}$$

- Alors que la pulsation de la force extérieure est aussi égale a cette valeur ; donc effectivement le système oscillera a la résonance en déplacement.
  - Dans le régime permanent, la solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$x_p(t) = A\cos(\Omega t+\varphi)$$

- Alors que la vitesse s'écrit :

$$v(t) = \frac{dx_p(t)}{dt} = -A\Omega\sin(\Omega t+\varphi)$$

L'amplitude de la vitesse est donnée par

$$V(\Omega) = A\Omega = \frac{F_0\Omega}{k}\frac{1}{\sqrt{(\Omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\Omega^2}}$$

Avec

$$F_0 = 1\text{N},\ \Omega = 7\text{rad.s}^{-1},\ \omega_0 = 9\text{rad.s}^{-1},\ k = 8.1N.\text{m}^{-1} \text{ et } \gamma = 4\text{s}^{-1}$$

- Ce qui donne

$$V(7) = \frac{7}{8.1}\frac{1}{\sqrt{(7^2-9^2)^2+4.4^2.7^2}} = 0.013\text{m.s}^{-1}$$

  - La puissance instantanée de dissipation pour une pulsation extérieure Ω est donnée par :

$$P_\Omega(t) = \alpha\dot{x}^2(t) = \alpha V^2(\Omega)\cos^2(\Omega t+\varphi)$$

- La valeur maximale $P_\Omega(t)$ est égale a $\alpha V^2(\Omega)$ car $\cos^2(\Omega t+\varphi)$ a une valeur maximale de 1.

Donc la valeur maximale que peut prendre cette grandeur dans le temps est égale a :

$$P_\Omega(t) = 0.8.(0.013)^2 = 0.00013 \text{Joule.s}^{-1}$$

- L'énergie cinétique du système s'écrit :

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

- L'énergie potentielle s'écrit :

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

- Le Lagrangien du système s'écrit :

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

- Les équations différentielles de mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 = 0 \end{cases}$$

- Dans un mode de vibration les deux masses oscillent a la même pulsation avec des amplitudes et phases différente, on se propose les solutions suivantes (en notation complexes)

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t) = \tilde{A}_1 e^{j\omega t} \\ \tilde{x}_2(t) = \tilde{A}_2 e^{j\omega t} \end{cases}$$

Avec

$$\tilde{A}_1 = A_1 e^{j\varphi_1} \text{ et } \tilde{A}_2 = A_2 e^{j\varphi_2}$$

- En remplaçant les solutions suivantes dans le système d'équations différentielles ci-dessus on trouve :

$$\begin{cases} \left[-\omega^2 m_1 + (k_1+k_2)\right]\tilde{A}_1 - k_2\tilde{A}_2 = 0 \\ -k_2\tilde{A}_1 + \left[-\omega^2 m_2 + k_2\right]\tilde{A}_2 = 0 \end{cases}$$

- Ce systeme d'équations admet une solution non triviale si seulement si son déterminant est nul:

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 m_1 + (k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{vmatrix} = 0$$

- Ce qui donne

$$m_1 m_2 \omega^4 - \omega^2 \left(m_1 k_1 + m_2 k_1 + m_2 k_2\right) + k_1 k_2 = 0$$

- En remplaçant par les valeurs numériques, on trouve :

$$0.01\omega^4 - 3\omega^2 + 100 = 0$$

- En faisant le changement de variable

$$z = \omega^2$$

- On se retrouve avec l'équation

$$0.01Z^2 - 3Z + 100 = 0$$

- Le discriminant s'écrit

$$9 - 4.0.01.100 = 5 > 0$$

- Les solutions sont données par :

$$\omega_1^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{0.02}$$

Ce qui donne la première pulsation :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{0.02}} = 6.18\text{rad.s}^{-1}$$

Et

$$\omega_2^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{0.02}$$

Ce qui donne la seconde pulsation :

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{0.02}} = 16.18\text{rad.s}^{-1}$$

- Pour le premier mode, on remplace $\omega_1^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{0.02}$ dans l'équation

$$\left[-\omega^2 m_1 + \left(k_1 + k_2\right)\right]\tilde{A}_1 - k_2 \tilde{A}_2 = 0$$

On trouve le rapport des amplitudes dans le mode 1 :

$$\frac{\tilde{A}_2^1}{\tilde{A}_1^1} = \frac{-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{0.02}\right)0.1 + 20}{10} = 1.62$$

Les masses oscillent dans ce mode en phase mais avec des amplitudes différentes.

- Pour le second mode, on remplace $\omega_2^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{0.02}$ dans l'équation

$$\left[-\omega^2 m_1 + \left(k_1 + k_2\right)\right]\tilde{A}_1 - k_2 \tilde{A}_2 = 0$$

On trouve le rapport des amplitudes dans le mode 2 :

$$\frac{\tilde{A}_2^2}{\tilde{A}_1^2} = \frac{-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{0.02}\right)0.1 + 20}{10} = -0.62$$

Les masses oscillent dans ce mode en opposition de phase avec des amplitudes différentes.

Les solutions générales s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t) = \tilde{A}_1^1 e^{j\omega_1 t} + \tilde{A}_1^2 e^{j\omega_2 t} \\ \tilde{x}_2(t) = \tilde{A}_2^1 e^{j\omega_1 t} + \tilde{A}_2^2 e^{j\omega_2 t} \end{cases}$$

Ou encore

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t) = \tilde{A}_1^1 e^{j\omega_1 t} + \tilde{A}_1^2 e^{j\omega_2 t} \\ \tilde{x}_2(t) = 1.62\tilde{A}_1^1 e^{j\omega_1 t} - 0.62\tilde{A}_1^2 e^{j\omega_2 t} \end{cases}$$

En notation réelle, les solutions sont données par :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1^1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1^1) + A_1^2 \cos(\omega_1 t + \varphi_1^2) \\ x_2(t) = 1.62 A_1^1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1^1) - 0.62 A_1^2 \cos(\omega_1 t + \varphi_1^2) \end{cases}$$

ou les constantes A_1^1 , A_1^2 , φ_1^1 et φ_1^2 sont définies par les conditions initiales.

- Les équations différentielles de mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = F(t) \quad \Rightarrow \quad m_1 \dot{x}_1^2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_0 \cos(\Omega t) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_2 \dot{x}_2^2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases}$$

- Dans le régime permanent, on se propose des solutions sinusoïdales (de la même forme que le second membre de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t) = \tilde{A}_1 e^{j\Omega t} \\ \tilde{x}_2(t) = \tilde{A}_2 e^{j\Omega t} \end{cases}$$

En remplaçant ces solutions proposées dans le système d'équations différentielles on obtient

$$\begin{cases} \left[-\Omega^2 m_1 + (k_1 + k_2)\right]\tilde{A}_1 - k_2 \tilde{A}_2 = F_0 \\ -k_2 \tilde{A}_1 + \left[-\Omega^2 m_2 + k_2\right]\tilde{A}_2 = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\tilde{A}_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -k_2 \\ 0 & -\Omega^2 m_2 + k_2 \end{vmatrix}}{m_1 m_2 \Omega^4 - \Omega^2 (m_1 k_1 + m_2 k_1 + m_2 k_2) + k_1 k_2} = \frac{F_0\left(-\Omega^2 m\right.}{m_1 m_2 \Omega^4 - \Omega^2 (m_1 k_1 +}$$

Ce résultat montre que la masse m_1 restera immobile pour une valeur de pulsation extérieure égale a

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$

- L’impédance d’entrée s’obtient de la manière suivante :

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = F(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 = 0 \end{cases}$$

Pour une solution sinusoïdale (en notation complexe), on a

$$\ddot{x}_1 = j\Omega\dot{x}_1 ,\ x_1 = \frac{\dot{x}_1}{j\Omega} ,\ \ddot{x}_2 = j\Omega\dot{x}_2 \text{ et } x_2 = \frac{\dot{x}_2}{j\Omega}$$

L’équation ci dessus devient

$$\begin{cases} m_1 j\Omega\dot{x}_1 + (k_1+k_2)\dfrac{\dot{x}_1}{j\Omega} - k_2\dfrac{\dot{x}_2}{j\Omega} = F(t) \\ m_2 j\Omega\dot{x}_2 + k_2\dfrac{\dot{x}_2}{j\Omega} - k_2\dfrac{\dot{x}_1}{j\Omega} = 0 \end{cases}$$

Ou encore

$$\begin{cases} j\left(m_1\Omega - \dfrac{1}{\Omega}(k_1+k_2)\right)\dot{x}_1 - k_2\dfrac{\dot{x}_2}{j\Omega} = F(t) \\ \dot{x}_2 = \dfrac{k_2}{\left(m_2 j\Omega - \dfrac{k_2}{\Omega}\right)j\Omega}\dot{x}_1 \end{cases}$$

En remplaçant la deuxième équation dans la première on trouve :

$$\left(j\left(m_1\Omega - \frac{1}{\Omega}(k_1+k_2)\right) + \frac{k_2}{\Omega^2}\frac{k_2}{\left(m_2 j\Omega - \dfrac{k_2}{\Omega}\right)}\right)\dot{x}_1 = F(t)$$

L’impédance d’entrée est donnée par :

$$Z_e = j\left(m_1\Omega - \frac{1}{\Omega}(k_1+k_2)\right) + \frac{k_2}{\Omega^2}\frac{k_2}{\left(m_2 j\Omega - \dfrac{k_2}{\Omega}\right)}$$

- Le système électrique analogue s’obtient en remplaçant les grandeurs physiques du système mécanique par leurs analogues électriques :

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = F(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 = 0 \end{cases}$$

Ce qui devient :

$$\begin{cases} L_1\ddot{q}_1 + \left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\right)q_1 - \dfrac{1}{C_2}q_2 = U(t) \\ L_2\ddot{q}_2 + \dfrac{1}{C_2}q_2 - \dfrac{1}{C_2}q_1 = 0 \end{cases}$$

Le schéma électrique correspondant est donne par **:**