

EXAMEN FINAL

Module : **Vibrations et Ondes mécanique**

Durée : **2 Heures.**

NB :

- Le sujet d'examen contient deux problèmes sur 10pts.
- Chaque problème doit être traité sur des feuilles d'examens séparées

Problème 1 :« 10pts »

Partie A : Dans tout le problème on considère une corde homogène vibrant transversalement dans le plan Oxy . L'équation du mouvement est de la forme $y = f(x,t)$. Soient T et μ la tension et la masse linéique de la corde à l'équilibre, respectivement. On définit k le nombre d'onde de cette onde.

On appelle $y(x,t)$ le déplacement transversale d'un morceau de la corde situé en x à l'instant t . On donne l'équation de propagation de l'onde de d'Alembert sous la forme:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- En déduire la vitesse de propagation des ondes « Célérité » c .

On applique un ébranlement de type sinusoïdal.

- Déterminer les solutions de l'équation de propagation en utilisant la méthode de séparation des variables.

Maintenant la corde de longueur L fixée par les deux extrémités est lâchée sans vitesse initiale.

- Déterminer la forme de la solution générale.
- Montrer que les fréquences de vibration de la corde sont des multiples entiers d'une fréquence fondamentale f_1 .

La corde est excitée par un vibreur du mouvement $y(t, x = 0) = a \cos \omega t$ à l'extrémité $x=0$.

En utilisant les nouvelles conditions aux limites, montrer que la solution

▪

finale s'écrit comme suit: $y(t, x) = \frac{a}{\sin(kL)} \cos(\omega t) \sin(kL - kx)$

Que se passe-t-il lorsque $\omega = \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$?

▪

Comment se nomme ce phénomène ?

▪

Partie B : On considère maintenant deux cordes, de même tension linéique T et de masses linéiques μ_1 et μ_2 , et attachées à la jonction « O » en $x=0$ pour former une longue corde tendue horizontalement suivant l'axe Ox . Une onde incidente sinusoïdale transversale de faible amplitude A_i et venant de la gauche (région $x < 0$) de la forme: $y_i(x, t) = A_i \cos(\omega t - k_1 x)$.

A la jonction O il y a une onde réfléchie dans la région $x < 0$ et une onde transmise vers la région $x > 0$. On définit k_1 et k_2 respectivement comme étant les vecteurs d'ondes dans les régions $x < 0$ et $x > 0$:

▪ Exprimer les deux équations de continuité au niveau de la jonction O qui donnent deux relations reliant les amplitudes A_i, A_r, A_t au rapport $\frac{k_1}{k_2}$.

▪ En déduire les coefficients de réflexion $r = \frac{A_r}{A_i}$ et de transmission $t = \frac{A_t}{A_i}$ pour l'amplitude en fonction de k_1 et k_2 , puis en fonction de μ_1 et μ_2 . Commenter.

Problème 2 : « 10pts »

Partie A : Soit une masse $m = 0.1 \text{ kg}$, attachée horizontalement à un ressort de constante de raideur $k = 8.1 \text{ N/m}$ et soumise à une force de frottement de type visqueux de coefficient de frottement $\alpha = 0.8 \text{ kg/s}$, se déplaçant horizontalement sur une droite. On applique une force sinusoïdale dans le sens du mouvement de la masse sous la forme suivante : $F(t) = \cos(7t)$

▪ Ecrire l'équation différentielle de mouvement de la masse.

- Ecrire l'expression de la solution générale. (Sans préciser les expressions de l'amplitude et de la phase).
- La masse oscillera-t-elle à la résonance ? Expliquer.
- Calculer dans ce cas la valeur de l'amplitude de la vitesse du mouvement de la masse.
- En déduire la valeur maximale (dans le temps) de la puissance dissipée.

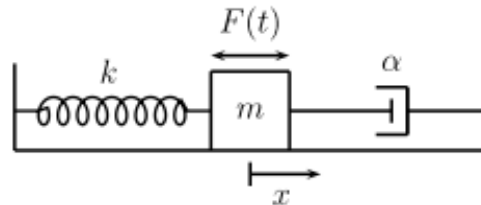


Figure 1

Partie B : Considérons le système constitué de deux masses m_1 et m_2 , attachées par deux ressorts de raideur k_1 et k_2 , pouvant se déplacer, sans frottement, sur une droite, (voir la figure 2.)

- Donner les expressions des énergies cinétique et potentielle du système.
- En déduire le Lagrangien du système
- Ecrire le système d'équations différentielles régissant le mouvement des masses.
- Calculer les pulsations propres du système dans le cas où : $m_1 = m_2 = 0.1\text{kg}$
Et $k_1 = k_2 = 10\text{N/m}$.
- Déterminer dans ce cas les modes propres du mouvement du système et écrire les solutions générales.

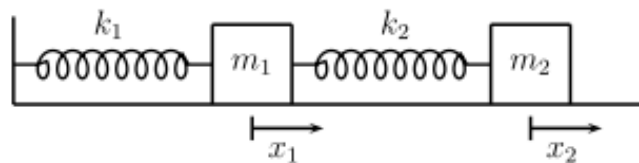


Figure 2

On applique sur la masse m_1 une force sinusoïdale de la forme :

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

- Ecrire le nouveau système d'équations différentielles régissant le mouvement des masses.

- Pour quelle valeur de pulsation extérieure la masse m_1 sera immobile dans le régime permanent ? (Utiliser les valeurs : $m_1 = m_2 = 0.1\text{kg}$ et $k_1 = k_2 = 10\text{ N/m}$).
- Ecrire l'expression de l'impédance d'entrée : $Z_e = \frac{F(t)}{\dot{x}_1(t)}$
- Donner le schéma électrique analogue au système mécanique étudié.

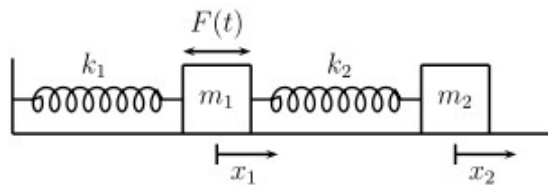


Figure 3

BONNE CHANCE

CORRECTION DE L'EXAMEN FINAL

Module : Vibrations et Ondes mécanique

PROBLEME 1 : 10 PTS

PARTIE A

1-L'équation de propagation aux dérivées partielles s'écrit :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

❖ la célérité de l'onde est égale :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

2-Les solutions de l'équation de propagation de l'onde libre :

❖ En utilisant la méthode des séparations des variables

$$y = A(x)T(t)$$

❖ On obtient :

$$c^2 \frac{\ddot{A}(x)}{A(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2$$

D'où la solution s'écrit comme suit :

$$A(x) = A_1 \cos \frac{\omega}{c} x + A_2 \sin \frac{\omega}{c} x \Rightarrow y(x,t) = A(x)T(t)$$
$$T(t) = T_1 \cos \omega t + T_2 \sin \omega t$$

▪ La corde est maintenant fixée :

❖ les conditions aux limites nous donnent :

$$y(x=0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$
$$y(x=L) = 0 \Rightarrow A(x) = A_2 \sin k_x x \Rightarrow k_x^{(n)} = \left(\frac{\omega}{c}\right)_x = \frac{n\pi}{L}$$

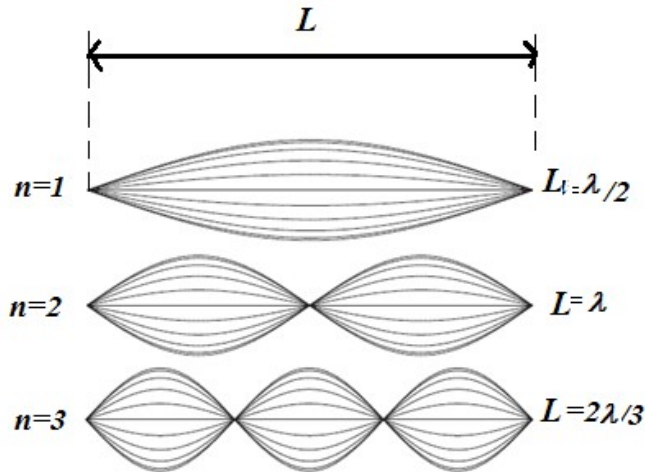
La solution s'écrit sous la forme :

$$A(x) = A_2 \sin k_x^{(n)} x$$

Les longueurs d'ondes associées aux modes propres sont :

$$k_x^{(n)} = \frac{2\pi}{\lambda} = \left(\frac{\omega}{c}\right)_x = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n}$$

La figure ci-dessus, illustre les différents types des modes propres :



Modes propres

❖ Les conditions initiales nous donnent :

$$\dot{T}(t=0) = 0 \Rightarrow T_2 = 0 \text{ donc } T(t) = T_1 \cos \omega_n t$$

D'où, la solution finale s'écrit :

$$y_T(x, t) = \sum_{n \geq 1} \Lambda \sin k_x^{(n)} x \cos \omega_n t \text{ avec } \Lambda = A_2 T_1$$

- Les fréquences propres des vibrations de la corde :

$$k_x^{(n)} = \frac{\omega_n}{c} = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \omega_n = n\omega_1 \text{ avec } \omega_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

- En régime forcé la solution de l'équation :

$$y(x, t) = A(x)T(t) = A_0 \cos(kx + \phi)[T_1 \cos \omega t + T_2 \sin \omega t]$$

En appliquant les nouvelles conditions aux limites :

$$\begin{cases} y(x=0) = a \cos \omega t \\ y(x=L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = A_0 T_1 \cos \phi \\ 0 = T(t) \cos(kL + \phi) \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} A_0 T_1 = A \\ T_2 = 0 \end{cases}$$

On déduit :

$$\begin{cases} A = \frac{a}{\cos \phi} \\ \cos(kL + \phi) = 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} A = \frac{a}{\cos \phi} \\ \cos(kL + \phi) = \cos\left[\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{a}{\cos \phi} \\ kL + \phi = n\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} A = \frac{a}{\cos \phi} \\ \phi = n\pi + \frac{\pi}{2} - kL \end{cases}$$

On remplace dans la solution ; et on obtient le résultat suivant :

$$y(x,t) = A(x)T(t) = A \cos(kx + \phi) \cos \omega t = \frac{a}{\cos \phi} \cos \omega t \cos\left(kx + n\pi + \frac{\pi}{2} - kL\right)$$

D'où :

$$y(x,t) = \frac{a}{\sin(kL - n\pi)} \cos \omega t \sin(-kx - n\pi + kL)$$

Alors la solution finale s'écrit comme suit :

$$y(x,t) = \frac{a}{\sin(kL)} \cos \omega t \sin(k(L - x))$$

On a :

$$\text{pour } \sin(kL) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = \sin n\pi \Rightarrow kL = n\pi$$

Finalement on obtient les pulsations quantifiées :

$$K^{(n)} = \frac{\omega_n}{c} = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

$$\text{Pour } \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \Rightarrow y(x,t) \rightarrow \infty$$

Ce phénomène est appelé la résonance

PARTIE B

- Les deux équations de continuité :

En appliquant les deux équations de continuités :

$$\begin{cases} y_i(0,t) + y_r(0,t) = y_t(0,t) \\ \left[\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x} \right]_{x=0} + \left[\frac{\partial y_r(x,t)}{\partial x} \right]_{x=0} = \left[\frac{\partial y_t(x,t)}{\partial x} \right]_{x=0} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} a_i + a_r = a_t \\ a_i - a_r = \frac{k_2}{k_1} a_t \end{cases}$$

- Les coefficients de réflexion et de transmission sont définis :

$$R = \frac{a_r}{a_i}$$

$$T = \frac{a_t}{a_i}$$

Après calcul, On obtient :

$$R = \frac{k_{01} - k_{02}}{k_{01} + k_{02}} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

$$T = \frac{2k_{01}}{k_{01} + k_{02}} \Rightarrow T = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

❖ Commentaires :

$$\begin{aligned} \mu_1 > \mu_2 &\Rightarrow R > 0 & \mu_1 > \mu_2 &\Rightarrow T > 0 \\ \mu_1 < \mu_2 &\Rightarrow R < 0 & \mu_1 < \mu_2 &\Rightarrow T > 0 \end{aligned}$$

PROBLEME 2 : 10 PTS

- L'équation différentielle du mouvement

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F(t)$$

Application numérique :

$$0.1\ddot{x} + 0.8\dot{x} + 8.1x = \cos(7t)$$

Ou encore

$$\ddot{x} + 8.0\dot{x} + 81.0x = 10 \cos(7t)$$

- La solution générale est la somme d'une solution sans second membre et une solution particulière :

$$x(t) = x_{SSM}(t) + x_p(t)$$

- Pour la solution sans second membre, on a :
- ✓ Le facteur d'amortissement

$$\checkmark \quad \gamma = \frac{\alpha}{2m} = \frac{0.8}{0.2} = 4s^{-1}$$

✓ La pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{8.1}{0.1}} = 9 \text{ rad. s}^{-1} \text{ Donc } \gamma < \omega_0$$

Avec la pseudo pulsation :

$$\omega_a = \sqrt{81 - 16} = 8.06 \text{ rad s}^{-1}$$

La solution sans second membre s'écrit donc :

$$x_{SSM}(t) = Ce^{-4t} \cos(8.06t + \theta)$$

La solution particulière s'écrit sous la forme

$$x_p(t) = A \cos(t + \varphi)$$

• La solution générale s'écrit donc :

$$x(t) = Ce^{-4t} \cos(8.06t + \theta) + A \cos(t + \varphi)$$

• La pulsation de résonance du système est donnée par :

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{81 - 32} = 7 \text{ rad s}^{-1}$$

• Alors que la pulsation de la force extérieure est aussi égale a cette valeur ; donc effectivement le système oscillera a la résonance en déplacement.

• Dans le régime permanent, la solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$x_p(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$$

• Alors que la vitesse s'écrit :

$$v(t) = \frac{dx_p(t)}{dt} = -A\Omega \sin(\Omega t + \varphi)$$

L'amplitude de la vitesse est donnée par

$$V(\Omega) = A\Omega = \frac{F_0 \Omega}{k} \frac{1}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}}$$

Avec

$$F_0 = 1\text{N}, \Omega = 7 \text{ rad.s}^{-1}, \omega_0 = 9 \text{ rad.s}^{-1}, k = 8.1 \text{ N.m}^{-1} \text{ et } \gamma = 4 \text{ s}^{-1}$$

• Ce qui donne

$$V(7) = \frac{7}{8.1} \frac{1}{\sqrt{(7^2 - 9^2)^2 + 4.4^2.7^2}} = 0.013 \text{ m.s}^{-1}$$

• La puissance instantanée de dissipation pour une pulsation extérieure

 est donnée par :

$$P_\Omega(t) = \alpha \dot{x}^2(t) = \alpha V^2(\Omega) \cos^2(\Omega t + \varphi)$$

- La valeur maximale $P_{\Omega}(t)$ est égale à $\alpha V^2(\Omega)$ car $\cos^2(\Omega t + \varphi)$ a une valeur maximale de 1.

Donc la valeur maximale que peut prendre cette grandeur dans le temps est égale à :

$$P_{\Omega}(t) = 0.8.(0.013)^2 = 0.00013 \text{Joule.s}^{-1}$$

- L'énergie cinétique du système s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

- L'énergie potentielle s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2$$

- Le Lagrangien du système s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2$$

- Les équations différentielles de mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases}$$

- Dans un mode de vibration les deux masses oscillent à la même pulsation avec des amplitudes et phases différentes, on se propose les solutions suivantes (en notation complexes)

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t) = \tilde{A}_1 e^{j\alpha t} \\ \tilde{x}_2(t) = \tilde{A}_2 e^{j\alpha t} \end{cases}$$

Avec

$$\tilde{A}_1 = A_1 e^{j\varphi_1} \text{ et } \tilde{A}_2 = A_2 e^{j\varphi_2}$$

- En remplaçant les solutions suivantes dans le système d'équations différentielles ci-dessus on trouve :

$$\begin{cases} [-\omega^2 m_1 + (k_1 + k_2)] \tilde{A}_1 - k_2 \tilde{A}_2 = 0 \\ -k_2 \tilde{A}_1 + [-\omega^2 m_2 + k_2] \tilde{A}_2 = 0 \end{cases}$$

- Ce système d'équations admet une solution non triviale si seulement si son déterminant est nul:

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 m_1 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{vmatrix} = 0$$

- Ce qui donne

$$m_1 m_2 \omega^4 - \omega^2 (m_1 k_1 + m_2 k_1 + m_2 k_2) + k_1 k_2 = 0$$

- En remplaçant par les valeurs numériques, on trouve :

$$0.01 \omega^4 - 3 \omega^2 + 100 = 0$$

- En faisant le changement de variable

$$z = \omega^2$$

- On se retrouve avec l'équation

$$0.01 Z^2 - 3Z + 100 = 0$$

- Le discriminant s'écrit

$$9 - 4 \cdot 0.01 \cdot 100 = 5 > 0$$

- Les solutions sont données par :

$$\omega_1^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{0.02}$$

Ce qui donne la première pulsation :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{0.02}} = 6.18 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Et

$$\omega_2^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{0.02}$$

Ce qui donne la seconde pulsation :

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{0.02}} = 16.18 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

- Pour le premier mode, on remplace $\omega_1^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{0.02}$ dans l'équation

$$[-\omega^2 m_1 + (k_1 + k_2)] \tilde{A}_1 - k_2 \tilde{A}_2 = 0$$

On trouve le rapport des amplitudes dans le mode 1 :

$$\frac{\tilde{A}_2^1}{\tilde{A}_1^1} = - \frac{\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{0.02} \right) 0.1 + 20}{10} = 1.62$$

Les masses oscillent dans ce mode en phase mais avec des amplitudes différentes.

- Pour le second mode, on remplace $\omega_2^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{0.02}$ dans l'équation

$$[-\omega^2 m_1 + (k_1 + k_2)] \tilde{A}_1 - k_2 \tilde{A}_2 = 0$$

On trouve le rapport des amplitudes dans le mode 2 :

$$\frac{\tilde{A}_2^2}{\tilde{A}_1^2} = - \frac{\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{0.02} \right) 0.1 + 20}{10} = -0.62$$

Les masses oscillent dans ce mode en opposition de phase avec des amplitudes différentes.

Les solutions générales s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t) = \tilde{A}_1^1 e^{j\omega_1 t} + \tilde{A}_1^2 e^{j\omega_2 t} \\ \tilde{x}_2(t) = \tilde{A}_2^1 e^{j\omega_1 t} + \tilde{A}_2^2 e^{j\omega_2 t} \end{cases}$$

Ou encore

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t) = \tilde{A}_1^1 e^{j\omega_1 t} + \tilde{A}_1^2 e^{j\omega_2 t} \\ \tilde{x}_2(t) = 1.62 \tilde{A}_1^1 e^{j\omega_1 t} - 0.62 \tilde{A}_1^2 e^{j\omega_2 t} \end{cases}$$

En notation réelle, les solutions sont données par :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1^1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1^1) + A_1^2 \cos(\omega_2 t + \varphi_1^2) \\ x_2(t) = 1.62 A_1^1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1^1) - 0.62 A_1^2 \cos(\omega_2 t + \varphi_1^2) \end{cases}$$

ou les constantes A_1^1 , A_1^2 , φ_1^1 et φ_1^2 sont définies par les conditions initiales.

- Les équations différentielles de mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = F(t) \Rightarrow m_1 \dot{x}_1^2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_0 \cos(\Omega t) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow m_2 \dot{x}_2^2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases}$$

- Dans le régime permanent, on se propose des solutions sinusoïdales (de la même forme que le second membre de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t) = \tilde{A}_1 e^{j\Omega t} \\ \tilde{x}_2(t) = \tilde{A}_2 e^{j\Omega t} \end{cases}$$

En remplaçant ces solutions proposées dans le système d'équations différentielles on obtient

$$\begin{cases} [-\Omega^2 m_1 + (k_1 + k_2)] \tilde{A}_1 - k_2 \tilde{A}_2 = F_0 \\ -k_2 \tilde{A}_1 + [-\Omega^2 m_2 + k_2] \tilde{A}_2 = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\tilde{A}_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -k_2 \\ 0 & -\Omega^2 m_2 + k_2 \end{vmatrix}}{m_1 m_2 \Omega^4 - \Omega^2 (m_1 k_1 + m_2 k_1 + m_2 k_2) + k_1 k_2} = \frac{F_0 (-\Omega^2 m_2 + k_2)}{m_1 m_2 \Omega^4 - \Omega^2 (m_1 k_1 + m_2 k_1 + m_2 k_2) + k_1 k_2}$$

Ce résultat montre que la masse m_1 restera immobile pour une valeur de pulsation extérieure égale a

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$

- L'impédance d'entrée s'obtient de la manière suivante :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases}$$

Pour une solution sinusoïdale (en notation complexe), on a

$$\ddot{x}_1 = j\Omega \dot{x}_1, \quad x_1 = \frac{\dot{x}_1}{j\Omega}, \quad \ddot{x}_2 = j\Omega \dot{x}_2 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{\dot{x}_2}{j\Omega}$$

L'équation ci dessus devient

$$\begin{cases} m_1 j\Omega \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) \frac{\dot{x}_1}{j\Omega} - k_2 \frac{\dot{x}_2}{j\Omega} = F(t) \\ m_2 j\Omega \dot{x}_2 + k_2 \frac{\dot{x}_2}{j\Omega} - k_2 \frac{\dot{x}_1}{j\Omega} = 0 \end{cases}$$

Ou encore

$$\begin{cases} j \left(m_1 \Omega - \frac{1}{\Omega} (k_1 + k_2) \right) \dot{x}_1 - k_2 \frac{\dot{x}_2}{j\Omega} = F(t) \\ \dot{x}_2 = \frac{k_2}{\left(m_2 j\Omega - \frac{k_2}{\Omega} \right) j\Omega} \dot{x}_1 \end{cases}$$

En remplaçant la deuxième équation dans la première on trouve :

$$\left(j \left(m_1 \Omega - \frac{1}{\Omega} (k_1 + k_2) \right) + \frac{k_2}{\Omega^2} \frac{k_2}{\left(m_2 j\Omega - \frac{k_2}{\Omega} \right)} \right) \dot{x}_1 = F(t)$$

L'impédance d'entrée est donnée par :

$$Z_e = j \left(m_1 \Omega - \frac{1}{\Omega} (k_1 + k_2) \right) + \frac{k_2}{\Omega^2} \frac{k_2}{\left(m_2 j\Omega - \frac{k_2}{\Omega} \right)}$$

- Le système électrique analogue s'obtient en remplaçant les grandeurs physiques du système mécanique par leurs analogues électriques :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases}$$

Ce qui devient :

$$\begin{cases} L_1 \ddot{q}_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) q_1 - \frac{1}{C_2} q_2 = U(t) \\ L_2 \ddot{q}_2 + \frac{1}{C_2} q_2 - \frac{1}{C_2} q_1 = 0 \end{cases}$$

Le schéma électrique correspondant est donné par :

