

R É P U B L I Q U E A L G É R I E N N E D É M O C R A T I Q U E E T P O P U L A I R E
 M I N I S T È R E D E L ' E N S E I G N E M E N T S U P É R I E U R E E T D E L A R E C H E R C H E S C I E N T I F I Q U E
 É C O L E P R É P A R A T O I R E E N S C I E N C E S E T T E C H N I Q U E S

T L M C E N

Département des Mathématiques

ÉPREUVE FINALE DU PREMIER SEMESTRE

Module: ALGÈBRE III

Date: 20 - 01 - 2016

Coefficient: 3

Responsable: M.HOUBAD

Année: 2015 - 2016

Durée: 2h00

Exercice 1 (06 pts).

Soit la matrice \mathcal{A} définie par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 01 pts 1. On montrer que \mathcal{A} admet une seule valeur propre $\lambda_0 = 2$ de multiplicité trois.

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda I) = -(\lambda - 2)^3.$$

- 02 pts 2. La décomposition de Dunford de la matrice \mathcal{A} .

$$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{N}, \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 03 Pts 3. Résolution du système

$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}X.$$

on a

$$X = e^{\mathcal{A}t} C = e^{\mathcal{D}t + \mathcal{N}t} C = e^{\mathcal{D}t} e^{\mathcal{N}t} C = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{N}^k}{k!} t^k \right) C$$

On utilise le fait que \mathcal{N} est nilpotente on a $\mathcal{N}^3 = 0$, ce qui donne

$$X = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \left(I + \mathcal{N}t + \frac{\mathcal{N}^2}{2} t^2 \right) C, \quad \mathcal{N}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}^3.$$

Exercice 2 (08 pts).

Soit la matrice \mathcal{A} définie par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 01 pt 1. Le polynôme caractéristique de la matrice \mathcal{A}

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda I) = (2 - \lambda)^3 (4 - \lambda).$$

01 pt

2. Détermination des vecteurs propres de la matrice \mathcal{A} .

$$\mathbb{E}_2 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathbb{E}_4 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

02 pts

3. La réduction de Jordan de la matrice \mathcal{A} et le polynôme minimal de \mathcal{A} .

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad m_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 4).$$

01 pt

4. L'expression de \mathcal{A}^{-1} en fonction de la matrice \mathcal{A} . On utilise le fait que le polynôme minimal est annulateur de \mathcal{A} donc

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} - 2\text{I})^2 (\mathcal{A} - 4\text{I}) &= 0 \implies \mathcal{A}^3 - 8\mathcal{A}^2 + 20\mathcal{A} - 16\text{I} = 0 \\ &\implies \mathcal{A} (\mathcal{A}^2 - 8\mathcal{A} + 20\text{I}) = 16\text{I} \\ &\implies \mathcal{A} \underbrace{\left(\frac{1}{16}\mathcal{A}^2 - \frac{1}{2}\mathcal{A} + \frac{5}{4}\text{I} \right)}_{= \mathcal{A}^{-1}} = \text{I}. \end{aligned}$$

5. La forme de la décomposition de Dunford de la matrice \mathcal{A} .

01 pt

(a) Détermination de la matrice de passage

$$\begin{aligned} \mathcal{A}v_1 &= 2v_1 \\ \mathcal{A}v_2 &= v_1 + 2v_2 \\ \mathcal{A}v_3 &= 2v_3 \\ \mathcal{A}v_4 &= 4v_4 \end{aligned}$$

si le vecteur v_1 prend comme valeur l'un des deux vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

cela conduit à une contradiction lors de la résolution de l'équation deux du système précédent, pur cela on prend une combinaison linéaires de ces deux vecteurs, par exemple

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce qui donne que

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, / \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

01 pt

(b) La décomposition de Dunford est de la forme

$$\mathcal{A} = P \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{= \mathcal{D}} P^{-1} + P \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= \mathcal{N}'} P^{-1}$$

01 pt

6. Calculer du terme générale de la suite vectoriel

$$X_{n+1} = \mathcal{A} X_n, \quad X_0 \in \mathbb{R}^4.$$

donc

$$Y_n = \mathcal{A}'^n Y_0, \quad X_n = P Y_n$$

ainsi

$$\mathcal{A}'^n = (\mathcal{D}' + \mathcal{N}')^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \mathcal{D}'^{n-k} \mathcal{N}'^k = \sum_{k=0}^1 C_n^k \mathcal{D}'^{n-k} \mathcal{N}'^k = \mathcal{D}'^n + n \mathcal{D}'^{n-1} \mathcal{N}'.$$

alors

$$X_n = P [\mathcal{D}'^n + n \mathcal{D}'^{n-1} \mathcal{N}'] Y_0, \quad Y_0 \in \mathbb{R}^4, \quad P Y_0 = X_0.$$

Exercice 3 (06 pts).

L'objectif de cet exercice est de résoudre le système suivant

$$\begin{cases} f^{(2)} - 2g^{(1)} + f = 0, \\ g^{(2)} - f^{(1)} = 0, \end{cases}$$

on pose

$$\frac{d}{dt} X = \begin{pmatrix} f^{(2)} \\ g^{(2)} \\ f^{(1)} \\ g^{(1)} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ g^{(1)} \\ f \\ g \end{pmatrix}.$$

01 pt

1. Déterminer la matrice \mathcal{A} .

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

01 pt

2. Le polynôme caractéristique de la matrice \mathcal{A} .

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda I) = \lambda^2 (\lambda - 1) (\lambda + 1).$$

3. La réduction de Jordan de la matrice \mathcal{A} et une matrice de passage correspondante.

01 pt

(a) Les vecteurs propres

$$\mathbb{E}_0 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathbb{E}_{-1} = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathbb{E}_1 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

01 pt

(b) Détermination de la matrice de passage

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne le système

$$\begin{aligned} \mathcal{A}v_1 &= 0 \\ \mathcal{A}v_2 &= v_1 \\ \mathcal{A}v_3 &= v_3 \\ \mathcal{A}v_4 &= -v_4 \end{aligned}$$

alors

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

01 pt

4. Déterminer la solution de

$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}X.$$

on résoud

$$\frac{d}{dt}Y = \mathcal{A}'Y, \quad X = PY$$

donc

$$\begin{aligned} Y &= e^{\mathcal{A}'t}C = e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}t} C = e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}t} e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}t} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}t} C \\ &= e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}t} e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}t} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \sum_{k=0}^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^k \frac{t^k}{k!} C \end{aligned}$$

finalement

$$X = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \left[I + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} t \right] C, \quad C \in \mathbb{R}^4.$$

01 pt

5. Dédurre les deux fonction f et g .

$$\begin{aligned} f(t) &= 2c_2 + c_3e^t - c_4e^{-t}, \\ g(t) &= c_2t + c_3e^t + c_4e^{-t}. \end{aligned}$$