

R É P U B L I Q U E A L G É R I E N N E D É M O C R A T I Q U E E T P O P U L A I R E
M I N I S T È R E D E L ' E N S E I G N E M E N T S U P É R I E U R E E T D E L A R E C H E R C H E S C I E N T I F I Q U E
É C O L E P R É P A R A T O I R E E N S C I E N C E S E T T E C H N I Q U E S

T L M C E N

Département des Mathématiques

ÉPREUVE FINALE DU PREMIER SEMESTRE

Module: ALGÈBRE III

Date: 20 - 01 - 2016

Coefficient: 3

Responsable: M.HOUBAD

Année: 2015 - 2016

Durée: 2h00

Exercice 1 (06 pts).

Soit la matrice \mathcal{A} définie par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que \mathcal{A} admet qu'une seule valeur propre $\lambda_0 = 2$ de multiplicité trois.
2. Donner la décomposition de Dunford de la matrice \mathcal{A} .
3. Résoudre le système

$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}X.$$

Exercice 2 (08 pts).

Soit la matrice \mathcal{A} définie par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice \mathcal{A} vaut

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = (2 - \lambda)^3(4 - \lambda).$$

2. Déterminer les vecteurs propres de la matrice \mathcal{A} .
3. Donner la réduction de Jordan de la matrice \mathcal{A} et déduire le polynôme minimal de \mathcal{A} .
4. Donner l'expression de \mathcal{A}^{-1} en fonction de la matrice \mathcal{A} sans calculer.
5. Donner la forme de la décomposition de Dunford de la matrice \mathcal{A} sans calculer.
6. Calculer le terme générale de la suite vectoriel du terme générale X_n définie par

$$X_{n+1} = \mathcal{A}X_n, \quad X_0 \in \mathbb{R}^4.$$

Exercice 3 (06 pts).

L'objectif de cet exercice est de résoudre le système suivant

$$\begin{cases} f^{(2)} - 2g^{(1)} + f = 0, \\ g^{(2)} - f^{(1)} = 0, \end{cases}$$

on pose

$$\frac{d}{dt}X = \begin{pmatrix} f^{(2)} \\ g^{(2)} \\ f^{(1)} \\ g^{(1)} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ g^{(1)} \\ f \\ g \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice \mathcal{A} de tel sorte que

$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}X.$$

2. Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice \mathcal{A} vaut

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2 (\lambda - 1) (\lambda + 1).$$

3. Donner la réduction de Jordan de la matrice \mathcal{A} et une matrice de passage correspondante.

4. Déterminer la solution de

$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}X.$$

5. Dédire les deux fonction f et g .