République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l' Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

École Préparatoire en Sciences et Techniques

T L M C E N

Département des Mathématiques

ÉPREUVE FINALE DU PREMIER SEMESTRE

Module: Algèbre III	Responsable: M.HOUBAD
Date: 20 - 01 - 2016	Année: 2015 - 2016
Coefficient: 3	Durée: $2h00$

Exercice 1 (06 pts).

Soit la matrice $\mathcal{A}$ définie par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ admet qu'une seul valeur propre $\lambda_0 = 2$ de multiplicité trois.
2. Donner la décomposition de Dunford de la matrice $\mathcal{A}$.
3. Résoudre le système

$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}\, X\ .$$

Exercice 2 (08 pts).

Soit la matrice $\mathcal{A}$ définie par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice $\mathcal{A}$ vaut

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = (2-\lambda)^3(4-\lambda).$$

2. Déterminer les vecteurs propres de la matrice $\mathcal{A}$.
3. Donner la réduction de Jordan de la matrice $\mathcal{A}$ et déduire le polynôme minimal de $\mathcal{A}$.
4. Donner l'expression de $\mathcal{A}^{-1}$ en fonction de la matrice $\mathcal{A}$ sans calcule.
5. Donner la forme de la décomposition de Dunford de la matrice $\mathcal{A}$ sans calcule.
6. Calculer le terme générale de la suite vectoriel du terme générale X_n définie par

$$X_{n+1} = \mathcal{A}X_n, \quad X_0 \in \mathbb{R}^4.$$

Exercice 3 (06 pts).

L'objective de cet exercice est de résoudre le système suivant

$$\begin{cases} f^{(2)} - 2\,g^{(1)} + f &= 0\,, \\ g^{(2)} - f^{(1)} &= 0\,, \end{cases}$$

on pose

$$\frac{d}{dt}X = \begin{pmatrix} f^{(2)} \\ g^{(2)} \\ f^{(1)} \\ g^{(1)} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ g^{(1)} \\ f \\ g \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice $\mathcal{A}$ de tel sorte que
$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}\,X\,.$$
2. Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice $\mathcal{A}$ vaut
$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2\,(\lambda - 1)\,(\lambda + 1)\,.$$
3. Donner la réduction de Jordan de la matrice $\mathcal{A}$ et une matrice de passage correspondante.
4. Déterminer la solution de
$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}\,X\,.$$
5. Déduire les deux fonction f et g.

BP 165 RP, Bel Horizon, Tlemcen DZ - 13000, Algérie. Tél.+213(0)43 204 135. Fax. +213(0)43 201 824. www.epst-tlemcen.dz
mail to : m.houbad@gmail.com