RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ÉCOLE PRÉPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES

T L M C E N

Département des Mathématiques

SOLUTION ET BARAME DU DEVOIR SURVEILLE DU DEUXIEM SEMESTRE

Module: ALGÈBRE IV — Responsable: M.HOUBAD

Date: 16 - 03 - 2016 — Année: 2015 - 2016

Coefficient: 3 — Durée: $2h00$

Exercice 1 (04 pts).
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, b une forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. On montrer que

$$(\mathbb{F} + \mathbb{G})^{\perp} \subset (\mathbb{F} \cap \mathbb{G})^{\perp} .$$

$$y \in (\mathbb{F} + \mathbb{G})^{\perp} \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{F}+\mathbb{G} : \quad b(x , y) = 0 \quad \longleftarrow \boxed{01{,}00 \text{ pt}}$$

$$\Longrightarrow \forall x_1 \in \mathbb{F}, \quad \forall x_2 \in \mathbb{G} : \quad b(\underbrace{x_1 + x_2}_{=x} , y) = 0 \quad \longleftarrow \boxed{00{,}50 \text{ pt}}$$

$$(1) \qquad \Longrightarrow \forall x_1 \in \mathbb{F}, \quad \forall x_2 \in \mathbb{G} : \quad b(x_1 , y) + b(x_2 , y) = 0 \quad \longleftarrow \boxed{00{,}50 \text{ pt}}$$

$\mathbb{F}$ est un sous espace vectoriel alors on peut prendre $x_1 = 0$ et on utilise le fait que $b(0, y) = 0$ alors la relation (1) ce transforme en $\longleftarrow \boxed{00{,}50 \text{ pt}}$

$$(2) \qquad \forall x_2 \in \mathbb{G} : \quad b(x_2 , y) = 0 \quad \longleftarrow \boxed{00{,}50 \text{ pt}}$$

alors la relation (1) donne

$$(3) \qquad \forall x_1 \in \mathbb{F} : \quad b(x_1 , y) = 0 \quad \longleftarrow \boxed{00{,}50 \text{ pt}}$$

on utilise (2) et (3) on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{F} \cap \mathbb{G} : \quad b(x , y) = 0 \Longrightarrow y \in (\mathbb{F} \cap \mathbb{G})^{\perp} . \quad \longleftarrow \boxed{00{,}50 \text{ pt}}$$

Exercice 2 (04 pts).
Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[X]$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit l'application b définie par

$$\forall\ p , q \in \mathbb{E} : \quad b(p,q) = p(1)\,q(1) - p(-1)\,q(-1).$$

1. On montrer que b est une forme bilinéaire et on détermine la matrice associée à b dans la base canonique de $\mathbb{E}$.
   (a) b est bilinéaire

$$\left.\begin{aligned} b(\lambda p_1 + \mu p_2 , q) &= (\lambda\, p_1(1) + \mu\, p_2(1))\, q(1) \\ &\qquad - (\lambda\, p_1(-1) + \mu\, p_2(-1))\, q(-1). \\ &= \lambda\, (p_1(1)\, q(1) - p_1(-1)\, q(-1)) \\ &\qquad + \mu\, (p_2(1)\, q(1) - p_2(-1)\, q(-1)) \\ &= \lambda\, b(p_1 , q) + \mu\, b(p_2 , q) \end{aligned}\right\} \quad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

de plus

$$\left.\begin{aligned} b(p , q) &= p(1)\, q(1) - p(-1)\, q(-1) \\ &= q(1)\, p(1) - q(-1)\, p(-1) \\ &= b(q , p) \end{aligned}\right\} \quad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

alors b est linéaire par à la première variable et elle est symétrique donc elle est bilinéaire. $\longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$

(b) La matrice associée dans la base canonique de $\mathbb{E}$. Soit

$$p(x) = a_1 + a_2\,x + a_3\,x^2\,, \quad q(x) = b_1 + b_2\,x + b_3\,x^2\,,$$

donc

$$b(p\,,q) = 2\,a_1\,b_2 + 2\,a_2\,b_1 + 2\,a_2\,b_3 + 2\,a_3\,b_2\,.$$

alors

$$\mathcal{M}_{Canonique} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

2. On montrer que $\mathcal{Q}(p) = b(p,p)$ est une forme quadratique. Vu que b est bilinéaire symétrique donc c'est une forme polaire et donc $\mathcal{Q}$ est une forme quadratique. $\longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$

3. Détermination de la réduction de Sylvester de $\mathcal{Q}$ ainsi qu'une base correspondante à la réduction.

(a) La réduction de Sylvester.

$$\mathcal{Q}(p) = b(p\,,p) = 4\,a_1\,a_2 + 4\,a_2\,a_3 \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

on choisie le terme $4a_1a_2$ $\longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$
On calcule les dérivées partielles

$$\partial_{a_1}\mathcal{Q}(p) = 4\,a_2 = \varphi_1\,, \quad \partial_{a_2}\mathcal{Q}(p) = 4\,a_1 + 4\,a_3 = \varphi_2 \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

On détermine le terme correctif

$$\mathrm{Tc} = \mathcal{Q}(p) - \frac{1}{4}\,\varphi_1\,\varphi_2 = 0 \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

On réduit $\mathcal{Q}$ à la somme des carrées

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(p) &= \frac{1}{4}\,\varphi_1\,\varphi_2 \\ &= \frac{1}{16}\,(\varphi_1 + \varphi_2)^2 - \frac{1}{16}(\varphi_1 - \varphi_2)^2 \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}} \\ &= \underbrace{(a_1 + a_2 + a_3)^2}_{=\,a_1'} - \underbrace{(a_1 - a_2 + a_3)^2}_{=\,a_2'} \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}} \\ &= a_1'^2 - a_2'^2\,. \end{aligned}$$

(b) La base correspondante.

$$\begin{cases} a_1' = a_1 + a_2 + a_3 \\ a_2' = a_1 - a_2 + a_3 \\ a_3' = \alpha\,a_1 + \beta\,a_2 + \gamma\,a_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}}_{=\,P^{-1}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

$$\det P^{-1} = 2\,(\alpha - \gamma) \neq 0 \iff \alpha \neq \gamma \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

il suffit de prendre

$$\alpha = 1\,, \quad \beta = 0\,, \quad \gamma = 0 \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

et donc la base vaut

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}\,x^2\,, -\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}\,x^2\,, 1 - x^2 \right\}. \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

Exercice 3 (04 pts).

Soit $\mathbb{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit la forme quadratique $\mathcal{Q}$ définie par

$$\forall\, \mathcal{A} \in \mathbb{E} : \quad \mathcal{Q}(\mathcal{A}) = \det(\mathcal{A}).$$

Déterminer l'orthogonal du sous espace vectoriel

$$\mathbb{F} = \left\{ \mathcal{A} \in \mathbb{E} : \ {}^t\mathcal{A} = -\mathcal{A} \right\}.$$

1. Détermination de la forme polaire

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathcal{A},\mathcal{B}) &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{Q}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) - \mathcal{Q}(\mathcal{A}) - \mathcal{Q}(\mathcal{B})\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\det(\mathcal{A}+\mathcal{B}) - \det(\mathcal{A}) - \det(\mathcal{B})\right] \end{aligned}\right\} \longleftarrow \boxed{00{,}75 \text{ pt}}$$

2. Détermination de $\mathbb{F}$ (l'expression des éléments ou une base)

$$\mathcal{A} \in \mathbb{F} \Longrightarrow \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \ {}^t\mathcal{A} = -\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix} = a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \longleftarrow \boxed{00{,}50 \text{ pt}}$$

   donc

$$\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \longleftarrow \boxed{00{,}50 \text{ pt}}$$

3. Détermination de l'orthogonal

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} \in \mathbb{F}^{\perp} &\Longrightarrow \mathcal{B} \perp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \longleftarrow \boxed{00{,}50 \text{ pt}} \\
&\Longrightarrow \mathcal{S}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{B} \right) = 0 \quad \longleftarrow \boxed{00{,}50 \text{ pt}} \\
&\Longrightarrow \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{B} \right) - \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \det(\mathcal{B}) = 0 \\
&\Longrightarrow \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2+1 \\ b_3-1 & b_4 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}} \\
&\Longrightarrow b_2 = b_3 \quad \longleftarrow \boxed{00{,}50 \text{ pt}} \\
&\Longrightarrow \mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{F}^{\perp} = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

Exercice 4 (08 pts).

Soit $\mathbb{R}^4$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit l'application $\mathcal{Q}$ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{Q}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2\,x_1 x_2 + 2\,x_1 x_3 + 2\,x_1 x_4 + 3\,x_2 x_3 + 3\,x_2 x_4 + 3\,x_3 x_4 .$$

1. Montrer que $\mathcal{Q}$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ et déterminer sa forme polaire.
   (a) $\mathcal{Q}$ est une forme quadratique. $\mathcal{Q}$ est un polynôme homogène de degré deux donc $\mathcal{Q}$ est une forme quadratique $\longleftarrow \boxed{01{,}00 \text{ pt}}$

(b) La forme polaire

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\,x\,,\,y\,) &= \frac{1}{2}\,[\,\mathcal{Q}(\,x\,+\,y\,)\,-\,\mathcal{Q}(\,x\,)\,-\,\mathcal{Q}(\,y\,)\,] \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}50 \text{ pt}}\\
&= x_1\,y_1\,+\,x_2\,y_2\,+\,x_3\,y_3\,+\,x_4\,y_4\,+\\
&\quad x_1\,y_2\,+\,x_2\,y_1\,+\,x_1\,y_3\,+\,x_3\,y_1\,+\\
&\quad x_1\,y_4\,+\,x_4\,y_1\,+\,\frac{3}{2}\,x_2\,y_3\,+\,\frac{3}{2}\,x_3\,y_2\,+\\
&\quad \frac{3}{2}\,x_2\,y_4\,+\,\frac{3}{2}\,x_4\,y_2\,+\,\frac{3}{2}\,x_3\,y_4\,+\,\frac{3}{2}\,x_4\,y_3\,. \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}75 \text{ pt}}
\end{aligned}$$

2. Déterminer la matrice associée à $\mathcal{Q}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

$$\mathcal{M}_{Canonique}(\mathcal{Q}) = \mathcal{M}_{Canonique}(\mathcal{S}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}75 \text{ pt}}$$

3. Déterminer la matrice associée à la forme quadratique $\mathcal{Q}$ dans la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Détermination de la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

Détermination de la matrice associée dans la nouvelle base

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{Q}) &= {}^tP\ \mathcal{M}_{Canonique}\ P \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}50 \text{ pt}}\\
&= \begin{pmatrix} 19 & 14 & 14 & 15 \\ 14 & 10 & 21/2 & 11 \\ 14 & 21/2 & 10 & 11 \\ 15 & 11 & 11 & 12 \end{pmatrix} \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}
\end{aligned}$$

4. Déterminer le noyau de la forme quadratique $\mathcal{Q}$.

$$y \in \mathcal{N}(\,\mathcal{Q}\,) \Longrightarrow y \in \mathrm{Ker}(\,\mathcal{M}(\,\mathcal{Q}\,)\,) \Longrightarrow \mathcal{M}(\,\mathcal{Q}\,)\,y \;=\; 0 \Longrightarrow y \;=\; 0 \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}50 \text{ pt}}$$

5. Déterminer la réduction de Sylvester de la forme quadratique $\mathcal{Q}$ et la signature de $\mathcal{Q}$.

$$\mathcal{Q}(\,x\,) \;=\; x_1^2\,+\,x_2^2\,+\,x_3^2\,+\,x_4^2\,+\,2\,x_1\,x_2\,+\,2\,x_1\,x_3\,+\,2\,x_1\,x_4\,+\,3\,x_2\,x_3\,+\,3\,x_2\,x_4\,+\,3\,x_3\,x_4\,.$$

On applique la méthode de Gauss et on choisie choisie le terme x_1. $\longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$

$$\mathcal{Q}(\,x\,) \;=\; x_1^2 + 2\,x_1\,(\,x_2 + x_3 + x_4\,) + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 3\,x_2\,x_3 + 3\,x_2\,x_4 + 3\,x_3\,x_4\,. \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

on applique la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - (x_2 + x_3 + x_4)^2 \\ &\quad + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 3\,x_2\,x_3 + 3\,x_2\,x_4 + 3\,x_3\,x_4\,. \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}} \end{aligned}$$

On détermine le terme correctif

$$Q(x) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 + \underbrace{x_2\,x_3 + x_2\,x_4 + x_3\,x_4}_{=Tc}\,. \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

On applique la méthode des dérivées partielles au niveau du terme Tc
On choisi le terme $x_2\,x_3$ $\longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$

$$\partial_{x_2}Tc = x_3 + x_4 = \varphi_1\,, \quad \partial_{x_3}Tc = x_2 + x_4 = \varphi_2 \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

$$Tc' = Tc - \varphi_1\,\varphi_2 = -\,x_4^2 \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

$$Tc = \varphi_1\,\varphi_2 - x_4^2 = \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_2)^2 - \frac{1}{4}(\varphi_1 - \varphi_2)^2 - x_4^2 \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

$$Tc = \left(\frac{1}{2}\,x_2 + \frac{1}{2}\,x_3 + \frac{1}{2}\,x_4\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\,x_2 - \frac{1}{2}\,x_3\right)^2 - x_4^2 \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

$$Q(x) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 + \left(\frac{1}{2}\,x_2 + \frac{1}{2}\,x_3 + \frac{1}{2}\,x_4\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}\,x_3\right)^2 - x_4^2 \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

6. En utilisant la signature de Q étudier le caractère de Q d'être définie positive, d'être dégénérée.

$$\mathrm{Sg}(Q) = (2,2) \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$

donc Q elle n'est pas définie positive $\longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$ et elle est non dégénérée. $\longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$

7. Déterminer une base orthogonale de $\mathbb{R}^4$ par rapport a la forme polaire associée à Q.

$$\left\{\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_2' &= \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}\,x_3 + \frac{1}{2}\,x_4 \\ x_3' &= \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}\,x_3 \\ x_4' &= x_4 \end{aligned}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= x_1' - 2\,x_2' \\ x_2 &= x_2' + x_3' - \frac{1}{2}\,x_4' \\ x_3 &= x_2' - x_3' - \frac{1}{2}\,x_4' \\ x_4 &= x_4' \end{aligned}\right. \Longrightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}. \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}25 \text{ pt}}$$