RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ÉCOLE PRÉPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES
TLMCEN
Département des Mathématiques

DEVOIR SURVEILLE DU DEUXIEME SEMESTRE

Module: ALGÈBRE IV | Responsable: M.HOUBAD
Date: 16 - 03 - 2016 | Année: 2015 - 2016
Coefficient: 3 | Durée: $2h00$

Exercice 1 (04 pts).
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, b une forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. Montrer que

$$(\mathbb{F} + \mathbb{G})^{\perp} \subset (\mathbb{F} \cap \mathbb{G})^{\perp} .$$

Exercice 2 (04 pts).
Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[X]$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit l'application b définie par

$$\forall\ p\ ,\ q\ \in \mathbb{E}\ :\quad b(p,q) = p(1)\,q(1) - p(-1)\,q(-1).$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire et déterminer la matrice associée à b dans la base canonique de $\mathbb{E}$.
2. Montrer que $\mathcal{Q}$ définie par
$$\forall\ p \in \mathbb{E}\ :\quad \mathcal{Q}(p) = b(p,p),$$
est une forme quadratique
3. Déterminer la réduction de Sylvester de $\mathcal{Q}$ ainsi qu'une base correspondante à la réduction.

Exercice 3 (04 pts).
Soit $\mathbb{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit la forme quadratique $\mathcal{Q}$ définie par

$$\forall\ \mathcal{A} \in \mathbb{E}\ :\quad \mathcal{Q}(\mathcal{A}) = \det(\mathcal{A}).$$

Déterminer l'orthogonal du sous espace vectoriel

$$\mathbb{F} = \left\{ \mathcal{A} \in \mathbb{E}\ :\quad {}^t\mathcal{A} = -\mathcal{A} \right\}.$$

Exercice 4 (08 pts).
Soit $\mathbb{R}^4$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit l'application $\mathcal{Q}$ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{Q}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2\,x_1\,x_2 + 2\,x_1\,x_3 + 2\,x_1\,x_4 + 3\,x_2\,x_3 + 3\,x_2\,x_4 + 3\,x_3\,x_4 .$$

1. Montrer que $\mathcal{Q}$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ et déterminer sa forme polaire
2. Déterminer la matrice associée à $\mathcal{Q}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer la matrice associée à la forme quadratique $\mathcal{Q}$ dans la base
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}.$$
4. Déterminer le noyau de la forme quadratique $\mathcal{Q}$.
5. Déterminer la réduction de Sylvester de la forme quadratique $\mathcal{Q}$ et la signature de $\mathcal{Q}$.
6. En utilisant la signature de $\mathcal{Q}$ étudier le caractère de $\mathcal{Q}$ d'être définie positive, d'être dégénérée.
7. Déterminer une base orthogonale de $\mathbb{R}^4$ par rapport a la forme polaire associée à $\mathcal{Q}$.

BP 165 RP, Bel Horizon, Tlemcen DZ - 13000, Algérie. Tél.+213(0)43 204 135. Fax. +213(0)43 201 824. www.epst-tlemcen.dz
mail to : m.houbad@gmail.com