

R É P U B L I Q U E A L G É R I E N N E D É M O C R A T I Q U E E T P O P U L A I R E
M I N I S T È R E D E L ' E N S E I G N E M E N T S U P É R I E U R E E T D E L A R E C H E R C H E S C I E N T I F I Q U E
É C O L E P R E P A R A T O I R E E N S C I E N C E S E T T E C H N I Q U E S

T L M C E N

Département des Mathématiques

DEVOIR SURVEILLÉ DU PREMIER SEMESTRE

Module: ALGÈBRE III

Date: 11 - 11 - 2015

Coefficient: 3

Responsable: M.HOUBAD

Année: 2015 - 2016

Durée: 2h00

Exercice 1 (04 pts).

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une seule valeur propre telle que

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Montrer que si

$$\exists i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad i \neq j : \quad a_{ij} \neq 0,$$

alors \mathcal{A} est une matrice trigonalisable.

Exercice 2 (08 pts).

Soit la suite définie par

$$X_{n+1} = \mathcal{A}X_n, \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le terme général de la suite X_n . (05 pts)
2. Calculer la somme suivante (03 pts)

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Exercice 3 (08 pts).

Soit l'équation différentielle suivante

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad f^{(3)}(t) - 6f^{(2)}(t) + 12f^{(1)}(t) - 8f(t) = 0$$

1. Écrire l'équation précédente sous la forme (01 pts)

$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}X, \quad \mathcal{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad X = \begin{pmatrix} f^{(2)} \\ f^{(1)} \\ f \end{pmatrix}.$$

2. Calculer le polynôme caractéristique de \mathcal{A} et vérifier que 2 est une racine. (01 pts)
3. Montrer que \mathcal{A} est une matrice trigonalisable. (01 pts)
4. Déterminer sa matrice réduite et une matrice de passage correspondante. (02 pts)
5. Résoudre le système (02 pts)

$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}X$$

6. Déterminer la fonction f . (01 pt)

R É P U B L I Q U E A L G É R I E N N E D É M O C R A T I Q U E E T P O P U L A I R E
M I N I S T È R E D E L ' E N S E I G N E M E N T S U P É R I E U R E E T D E L A R E C H E R C H E S C I E N T I F I Q U E
É C O L E P R E P A R A T O I R E E N S C I E N C E S E T T E C H N I Q U E S

T L M C E N

Département des Mathématiques

CORRIGÉ ET BARÈME DU DEVOIR SURVEILLÉ DU PREMIER SEMESTRE

Module: ALGÈBRE III

Date: 11 - 11 - 2015

Coefficient: 3

Responsable: M.HOUBAD

Année: 2015 - 2016

Durée: 2h00

Exercice 1 (04 pts).

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une seule valeur propre telle que

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On suppose que

$$\exists i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad i \neq j : \quad a_{ij} \neq 0,$$

et que \mathcal{A} est une matrice diagonalisable, donc sa matrice réduite est de la forme

$$\mathcal{A}' = \lambda_0 \mathbf{I},$$

le calcul donne

$$\mathcal{A} = P \mathcal{A}' P^{-1} = \lambda_0 \mathbf{I}$$

donc

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad i \neq j : \quad a_{ij} = 0,$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse et donc \mathcal{A} est trigonalisable.

Exercice 2 (08 pts).

Soit la suite définie par

$$X_{n+1} = \mathcal{A}X_n, \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le terme général de la suite X_n . (05 pts)

01pt

(a) Polynôme caractéristique

$$P_{\mathcal{A}} = \det(\mathcal{A} - \lambda \mathbf{I}) = (4 - \lambda)^2(8 - \lambda)$$

01pt

(b) Les vecteurs propres

$$\mathbb{E}_4 = \text{Vect} \left\langle \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\rangle, \quad \mathbb{E}_8 = \text{Vect} \left\langle \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\rangle$$

01pt

(c) matrice réduite et matrice de passage

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

01pt

(d) calcule de \mathcal{A}^n

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^n &= P \mathcal{A}^n P^{-1} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n & 4^n & 0 \\ 4^n & 4^n & 8^n \\ 0 & 4^n & 8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 * 4^n & 0 & 0 \\ 2 * 4^n - 8^n & 8^n & 8^n \\ 4^n - 8^n & -4^n + 8^n & 4^n + 8^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{2n} & 0 & 0 \\ 2^{2n} - 2^{3n-1} & 2^{3n-1} & 2^{3n-1} \\ 2^{2n-1} - 2^{3n-1} & -2^{2n-1} + 2^{3n-1} & 2^{2n-1} + 2^{3n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

01pt

(e) le terme générale

$$\begin{aligned}
X_n = \mathcal{A}X_{n-1} &\implies X_n = \mathcal{A}^n X_0 \\
&\implies \begin{cases} x_n = 2^{2n} x_0 \\ y_n = (2^{2n} - 2^{3n-1})x_0 + 2^{3n-1}y_0 + 2^{3n-1}z_0 \\ z_n = (2^{2n-1} - 2^{3n-1})x_0 + (-2^{2n-1} + 2^{3n-1})y_0 + (2^{2n-1} + 2^{3n-1})z_0 \end{cases}
\end{aligned}$$

03pts

2. Calculer la somme suivante

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_n &= \sum_{k=1}^n X_k \\
&= \sum_{k=1}^n \mathcal{A}^k X_0 \\
&= \sum_{k=1}^n P \mathcal{A}^k P^{-1} X_0 \\
&= P \left(\sum_{k=1}^n \mathcal{A}^k \right) P^{-1} X_0 \\
&= P \left(\sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} 4^k & 0 & 0 \\ 0 & 4^k & 0 \\ 0 & 0 & 8^k \end{pmatrix} \right) P^{-1} X_0 \\
&= P \begin{pmatrix} \frac{4^{n+1} - 1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4^{n+1} - 1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8^{n+1} - 1}{7} \end{pmatrix} P^{-1} X_0 \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4^{n+1} - 1}{3} & \frac{4^{n+1} - 1}{3} & 0 \\ \frac{4^{n+1} - 1}{3} & \frac{4^{n+1} - 1}{3} & \frac{8^{n+1} - 1}{7} \\ 0 & \frac{4^{n+1} - 1}{3} & \frac{8^{n+1} - 1}{7} \end{pmatrix} P^{-1} X_0 \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{4^{n+1} - 1}{3} & 0 & 0 \\ 2 \frac{4^{n+1} - 1}{3} - \frac{8^{n+1} - 1}{7} & \frac{8^{n+1} - 1}{7} & \frac{8^{n+1} - 1}{7} \\ \frac{4^{n+1} - 1}{3} - \frac{8^{n+1} - 1}{7} & -\frac{4^{n+1} - 1}{3} + \frac{8^{n+1} - 1}{7} & \frac{4^{n+1} - 1}{3} + \frac{8^{n+1} - 1}{7} \end{pmatrix} X_0
\end{aligned}$$

Exercice 3 (08 pts).

Soit l'équation différentielle suivante

$$\forall t \in \mathbb{R} : f^{(3)}(t) - 6f^{(2)}(t) + 12f^{(1)}(t) - 8f(t) = 0$$

- 01pt 1. Écrire l'équation précédente sous la forme

$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}X \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} f^{(2)} \\ f^{(1)} \\ f \end{pmatrix}.$$

- 01pt 2. Calculer le polynôme caractéristique de \mathcal{A} et vérifier que 2 est une racine.

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda I) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8, \quad P_{\mathcal{A}}(2) = 0, \quad P_{\mathcal{A}}(\lambda) = (2 - \lambda)^3.$$

- 01pt 3. Montrer que \mathcal{A} est une matrice trigonalisable.

Détermination des vecteurs propres

$$(\mathcal{A} - 2I)V = 0 \implies \begin{cases} x = 4z \\ y = 2z \end{cases} \implies V = z \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathbb{E}_2 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

le polynôme caractéristique est scindé et

$$\dim \mathbb{E}_2 = 1 \neq 3 = \text{mul}(2),$$

donc la matrice \mathcal{A} est trigonalisable.

4. Déterminer sa matrice réduite et une matrice de passage correspondante.

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \left(v_1 \mid v_2 \mid v_3 \right)$$

le système à résoudre

$$\begin{cases} \mathcal{A}v_1 = 2v_1 \\ \mathcal{A}v_2 = av_1 + 2v_2 \\ \mathcal{A}v_3 = bv_1 + cv_2 + 2v_3 \end{cases}$$

- 0.5pt (a) Détermination de v_1 . Il suffit de prendre

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 01pt (b) Détermination de v_2 . On prend $a = 1$ et on résoud le système

$$(\mathcal{A} - 2I)v_2 = v_1$$

ce qui donne que

$$v_2 = \begin{pmatrix} 4z + 4 \\ 2z + 1 \\ z \end{pmatrix}.$$

on prend $z = 0$ on a

$$v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

01pt

(c) Détermination de v_3 . Il s'agit de résoudre le système

$$(\mathcal{A} - 2I)v_3 = bv_1 + cv_2$$

ce qui donne que

$$v_2 = \begin{pmatrix} 4z + 4b + c \\ 2z + b \\ z \end{pmatrix}.$$

on prend $z = 0$ on a

$$v_2 = \begin{pmatrix} 4b + c \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

pour que $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base il faut et il suffit que

$$\det P \neq 0 \implies c \neq 0$$

On choisie $c = 1$ et $b = 0$ ce qui donne que

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

02pt

5. Résoudre le système

$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}X$$

(a) Résolution de

$$\frac{d}{dt}Y = \mathcal{A}'Y$$

ce qui donne

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c_3t^2 + c_2t + c_1 \\ c_3t + c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

(b) Détermination de X

$$X = PY \implies X = \begin{pmatrix} 2c_3t^2 + (4c_2 + 2c_3)t + 4c_1 + 2c_2 + c_3 \\ 2c_3t^2 + (4c_2 + c_3)t + 4c_1 + c_2 \\ \frac{1}{2}c_3t^2 + c_2t + c_1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

01pt

6. Déterminer la fonction f .

$$f(t) = \left(\frac{1}{2}c_3t^2 + c_2t + c_1 \right) e^{2t}.$$