RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ÉCOLE PREPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES
TLMCEN
Département des Mathématiques

DEVOIR SURVEILLÉ DU PREMIER SEMESTRE

Module: ALGÈBRE III — Responsable: M.HOUBAD
Date: 11 - 11 - 2015 — Année: 2015 - 2016
Coefficient: 3 — Durée: $2h00$

Exercice 1 (04 pts).
Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une seule valeur propre telle que

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Montrer que si

$$\exists\, i, j \in \{1, \cdots, n\}, \quad i \neq j : \quad a_{ij} \neq 0,$$

alors $\mathcal{A}$ est une matrice trigonalisable.

Exercice 2 (08 pts).
Soit la suite définie par

$$X_{n+1} = \mathcal{A}X_n, \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le terme général de la suite X_n. (05 pts)
2. Calculer la somme suivante (03 pts)

$$\mathcal{S}_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Exercice 3 (08 pts).
Soit l'équation différentielle suivante

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad f^{(3)}(t) - 6f^{(2)}(t) + 12f^{(1)}(t) - 8f(t) = 0$$

1. Écrire l'équation précédente sous la forme (01 pts)

$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}X, \quad \mathcal{A} \in \mathcal{M}_3(\,\mathbb{R}\,), \quad X = \begin{pmatrix} f^{(2)} \\ f^{(1)} \\ f \end{pmatrix}.$$

2. Calculer le polynôme caractéristique de $\mathcal{A}$ et vérifier que 2 est une racine. (01 pts)
3. Montrer que $\mathcal{A}$ est une matrice trigonalisable. (01 pts)
4. Déterminer sa matrice réduite et une matrice de passage correspondante. (02 pts)
5. Résoudre le système (02 pts)

$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}X$$

6. Déterminer la fonction f. (01 pt)

BP 165 RP, Bel Horizon, Tlemcen DZ - 13000, Algérie. Tél.+213(0)43 204 135. Fax. +213(0)43 201 824. www.epst-tlemcen.dz
mail to : m.houbad@gmail.com

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ÉCOLE PREPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES

T L M C E N

Département des Mathématiques

CORRIGÉ ET BARÈME DU DEVOIR SURVEILLÉ DU PREMIER SEMESTRE

Module: ALGÈBRE III	Responsable: M.HOUBAD
Date: 11 - 11 - 2015	Année: 2015 - 2016
Coefficient: 3	Durée: $2h00$

Exercice 1 (04 pts).
Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une seule valeur propre telle que

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On suppose que

$$\exists\, i, j \in \{1, \cdots, n\}, \quad i \neq j : \quad a_{ij} \neq 0,$$

et que $\mathcal{A}$ est une matrice diagonalisable, donc sa matrice réduite est de la forme

$$\mathcal{A}' = \lambda_0 \mathrm{I},$$

le calcule donne

$$\mathcal{A} = P\mathcal{A}'P^{-1} = \lambda_0 \mathrm{I}$$

donc

$$\forall\, i, j \in \{1, \cdots, n\}, \quad i \neq j : \quad a_{ij} = 0,$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothése et donc $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

Exercice 2 (08 pts).
Soit la suite définie par

$$X_{n+1} = \mathcal{A}X_n, \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le terme général de la suite X_n. (05 pts)

01pt (a) Polynôme caractéristique

$$P_{\mathcal{A}} = \det(\mathcal{A} - \lambda \mathrm{I}) = (4-\lambda)^2(8-\lambda)$$

01pt (b) Les vecteurs propres

$$\mathbb{E}_4 = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathbb{E}_8 = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

01pt (c) matrice réduite et matrice de passage

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

`01pt` (d) calcule de $\mathcal{A}^n$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^n &= P\mathcal{A}'^n P^{-1}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0\\ 0 & 4^n & 0\\ 0 & 0 & 8^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4^n & 4^n & 0\\ 4^n & 4^n & 8^n\\ 0 & 4^n & 8^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2*4^n & 0 & 0\\ 2*4^n-8^n & 8^n & 8^n\\ 4^n-8^n & -4^n+8^n & 4^n+8^n\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 2^{2n} & 0 & 0\\ 2^{2n}-2^{3n-1} & 2^{3n-1} & 2^{3n-1}\\ 2^{2n-1}-2^{3n-1} & -2^{2n-1}+2^{3n-1} & 2^{2n-1}+2^{3n-1}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

`01pt` (e) le terme générale

$$\begin{aligned}
X_n = \mathcal{A}X_{n-1} \implies\ & X_n = \mathcal{A}^n X_0\\
\implies\ & \left\{\begin{array}{lcl} x_n &=& 2^{2n}x_0\\ y_n &=& (2^{2n}-2^{3n-1})x_0 + 2^{3n-1}y_0 + 2^{3n-1}z_0\\ z_n &=& (2^{2n-1}-2^{3n-1})x_0 + (-2^{2n-1}+2^{3n-1})y_0 + (2^{2n-1}+2^{3n-1})z_0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

`03pts` 2. Calculer la somme suivante

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_n &= \sum_{k=1}^{n} X_k\\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathcal{A}^k X_0\\
&= \sum_{k=1}^{n} P\mathcal{A}'^k P^{-1}X_0\\
&= P\left(\sum_{k=1}^{n}\mathcal{A}'^k\right)P^{-1}X_0\\
&= P\left(\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0\\ 0 & 4^n & 0\\ 0 & 0 & 8^n\end{pmatrix}\right)P^{-1}X_0\\
&= P\begin{pmatrix} \frac{4^{n+1}-1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{4^{n+1}-1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{8^{n+1}-1}{7}\end{pmatrix}P^{-1}X_0\\
&= \begin{pmatrix} \frac{4^{n+1}-1}{3} & \frac{4^{n+1}-1}{3} & 0\\ \frac{4^{n+1}-1}{3} & \frac{4^{n+1}-1}{3} & \frac{8^{n+1}-1}{7}\\ 0 & \frac{4^{n+1}-1}{3} & \frac{8^{n+1}-1}{7}\end{pmatrix}P^{-1}X_0\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\frac{4^{n+1}-1}{3} & 0 & 0\\ 2\frac{4^{n+1}-1}{3}-\frac{8^{n+1}-1}{7} & \frac{8^{n+1}-1}{7} & \frac{8^{n+1}-1}{7}\\ \frac{4^{n+1}-1}{3}-\frac{8^{n+1}-1}{7} & -\frac{4^{n+1}-1}{3}+\frac{8^{n+1}-1}{7} & \frac{4^{n+1}-1}{3}+\frac{8^{n+1}-1}{7}\end{pmatrix}X_0
\end{aligned}$$

Exercice 3 (08 pts).
Soit l'équation différentielle suivante

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad f^{(3)}(t) - 6f^{(2)}(t) + 12f^{(1)}(t) - 8f(t) = 0$$

$\boxed{\texttt{01pt}}$ 1. Écrire l'équation précédente sous la forme

$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}X \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} f^{(2)} \\ f^{(1)} \\ f \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\texttt{01pt}}$ 2. Calculer le polynôme caractéristique de $\mathcal{A}$ et vérifier que 2 est une racine.

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8, \quad P_{\mathcal{A}}(2) = 0,, \quad P_{\mathcal{A}}(\lambda) = (2-\lambda)^3.$$

$\boxed{\texttt{01pt}}$ 3. Montrer que $\mathcal{A}$ est une matrice trigonalisable.
Détermination des vecteurs propres

$$(\mathcal{A} - 2\mathrm{I})V = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x &= 4z \\ y &= 2z \end{cases} \Longrightarrow V = z \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathbb{E}_2 = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

le polymône caractéristique est scindé et

$$\dim \mathbb{E}_2 = 1 \neq 3 = \mathrm{mul}(2),$$

donc la matrice $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

4. Déterminer sa matrice réduite et une matrice de passage correspondante.

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \right)$$

le système à résoudre

$$\begin{cases} \mathcal{A}v_1 &= 2v_1 \\ \mathcal{A}v_2 &= av_1 + 2v_2 \\ \mathcal{A}v_3 &= bv_1 + cv_2 + 2v_3 \end{cases}$$

$\boxed{\texttt{0.5pt}}$ (a) Détermination de v_1. Il suffit de prendre

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\texttt{01pt}}$ (b) Détermination de v_2. On prend $a = 1$ et on résoud le système

$$(\mathcal{A} - 2\mathrm{I})v_2 = v_1$$

ce qui donne que

$$v_2 = \begin{pmatrix} 4z + 4 \\ 2z + 1 \\ z \end{pmatrix}.$$

on prend $z = 0$ on a

$$v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

01pt

(c) Détermination de v_3. Il s'agit de résoudre le système

$$(\mathcal{A}-2\mathrm{I})v_3 = bv_1 + cv_2$$

ce qui donne que

$$v_2 = \begin{pmatrix} 4z+4b+c \\ 2z+b \\ z \end{pmatrix}.$$

on prend $z=0$ on a

$$v_2 = \begin{pmatrix} 4b+c \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

pour que $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base il faut et il suffit que

$$\det P \neq 0 \Longrightarrow c \neq 0$$

On choisie $c=1$ et $b=0$ ce qui donne que

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

02pt

5. Résoudre le système

$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}X$$

(a) Résolution de

$$\frac{d}{dt}Y = \mathcal{A}'Y$$

ce qui donne

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c_3t^2 + c_2t + c_1 \\ c_3t + c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

(b) Détermination de X

$$X = PY \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 2c_3t^2 + (4c_2+2c_3)t + 4c_1 + 2c_2 + c_3 \\ 2c_3t^2 + (4c_2+c_3)t + 4c_1 + c_2 \\ \frac{1}{2}c_3t^2 + c_2t + c_1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

01pt

6. Déterminer la fonction f.

$$f(t) = \left(\frac{1}{2}c_3t^2 + c_2t + c_1\right)e^{2t}.$$

BP 165 RP, Bel Horizon, Tlemcen DZ - 13000, Algérie. Tél.+213(0)43 204 135. Fax. +213(0)43 201 824. www.epst-tlemcen.dz
mail to : m.houbad@gmail.com