

DEVOIR SURVEILLE

Module : **Vibrations et Ondes mécanique**

Durée : **2 Heures.**

NB : Le sujet d'examen contient deux problèmes sur 10pts.

Problème 1 : « 10pts »

Partie A : Soit une masse $m=0.1 \text{ kg}$, attachée à un ressort de raideur k , qui a un mouvement selon la coordonnée cartésienne x et qui est gouvernée par l'équation du mouvement suivante :

$$\ddot{x} + 10\dot{x} + 100x = 0$$

- Selon l'équation différentielle ci-dessus, quelles sont les forces agissant sur la masse m ? (donner le type et l'expression).
- En déduire la valeur numérique de la pulsation propre du système, la constante de raideur k , le coefficient de frottement et le facteur d'amortissement.
- Vérifier que le mouvement du système est oscillatoire amorti.
- En déduire la pseudo-pulsation et la pseudo-période du mouvement amorti.
- Ecrire dans ce cas l'équation générale du mouvement du système (sans refaire les calculs) puis commenter son allure.
- A l'instant initial $t=0$, la masse est lâchée avec une vitesse initiale $v_0 = 0.5 \text{ m/s}$ à la distance $x_0 = 0.1 \text{ m}$ dans le sens positif de x ; écrire l'équation horaire du mouvement.
- Calculer l'énergie emmagasinée dans le système à $t=0s$.
- Ecrire l'expression de l'énergie emmagasinée dans le système après un temps $t = T_a$.

Partie B : La masse m est maintenant soumise à une force extérieure sinusoïdale.

L'équation du mouvement correspondante s'écrit sous la forme :

$$\ddot{x} + 10\dot{x} + 100x = 10 \sin 10t$$

- En déduire l'amplitude et la pulsation de la force extérieure appliquée.
- La masse oscillera-t-elle, dans ce cas, en résonance ? Expliquer.
- Calculer, en régime permanent, l'amplitude du mouvement de la masse et son déphasage par rapport à la force extérieure.
- En déduire l'expression de l'équation horaire du mouvement de la masse en régime permanent.
- Calculer l'énergie fournie au système par la force extérieure pendant l'intervalle de temps $t = \left[\frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5} \right]$.

Problème 2 : « 10pts »

Partie A : Soit un chariot de masse M relié à un ressort de raideur k , qui glisse sans frottement sur le plan horizontal comme le montre la figure 1,

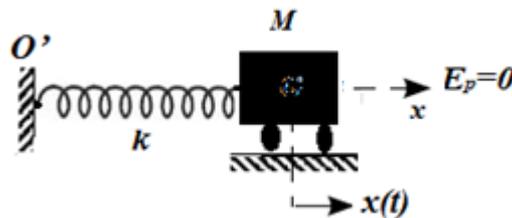


Figure 1 : Mouvement oscillatoire libre

Dans le cas des petites oscillations :

- Déterminer le Lagrangien du système.
- Etablir l'équation différentielle du mouvement et en déduire la pulsation propre.
- Déterminer la solution générale avec les conditions initiales.

$$x(t = 0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$$

Partie B : Le système est maintenant couplé à un pendule simple de longueur $l = OA$ et de masse m , comme le montre la figure 2 :

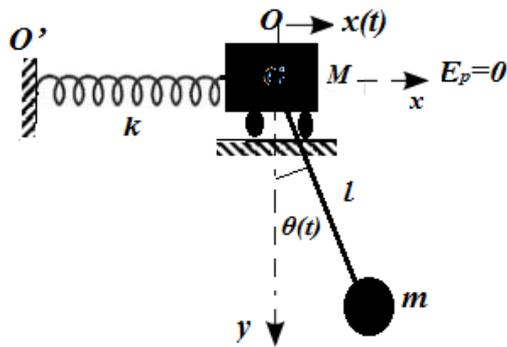


Figure 2: Couplage pendule simple avec un oscillateur harmonique

Dans le cas des petites oscillations :

- Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.
- En déduire le Lagrangien du système.
- Montrer que les équations différentielles du mouvement s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + kx = 0 \\ l\ddot{\theta} + \ddot{x} + g\theta = 0 \end{cases}$$

- On considère les solutions du système de type sinusoïdal :

$$\begin{cases} \theta(t) = Be^{j(\omega_p t + \varphi)} \\ x(t) = Ae^{j(\omega_p t + \varphi)} \end{cases}$$

Déterminer les pulsations propres ω_{1p} et ω_{2p} .

- Déterminer les solutions générales $x(t)$ et $\theta(t)$.
- Etudier les solutions générales du mouvement dans les **deux cas suivants** :

✚ M tend vers l'infini

✚ l tend vers 0.

Discuter et Justifier.

BONNE CHANCE

Equipe Modulaire :
Vibrations et Ondes mécaniques

SOLUTIONS

Problème 1 :10pts

- L'équation différentielle générale du mouvement s'écrit sous la forme :

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$$

- ✓ Donc en réarrangeant l'équation du mouvement donnée et en multipliant les deux termes par $m=0.1$, on obtient :

$$0.1\ddot{x} = -\dot{x} - 10x$$

Cela signifie que la masse est soumise à deux forces :

- ✓ La force de rappel dérivant d'un potentiel (énergie potentielle élastique du ressort) qui s'écrit sous la forme suivante :

$$F_r = -10x$$

- ✓ Et une force de frottement de type visqueux (proportionnelle à la vitesse de la masse m) que subit la masse :

$$F_f = -\dot{x}$$

- L'équation différentielle peut se mettre sous la forme:

$$m\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

Par identification on obtient :

- ✓ La pulsation propre $\omega_0 = 10$ rad/s
- ✓ La constante de raideur $k=10$ n/m
- ✓ Le coefficient de frottement $\alpha = 1$ kg/s
- ✓ Le facteur d'amortissement $\gamma = 5s^{-1}$
- On vérifie bien que : $\gamma < \omega_0$

L'amortissement est donc faible ; ce qui provoque un mouvement oscillatoire mais amorti.

- La pseudo-pulsation du mouvement oscillatoire amorti est donnée par :

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{100 - 25} = 8.66 \text{ rad/s}$$

- ✚ La pseudo-période est donnée par :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = 0.72 \text{ s}$$

- Dans le cas d'un mouvement oscillatoire amorti, l'équation horaire s'écrit sous la forme :

$$x(t) = C e^{-\gamma t} \cos(\omega_a t - \varphi)$$

- ✚ Le mouvement est oscillatoire par la présence du terme cosinus a une pseudo-pulsation ω_a différente de la pulsation propre du système ω_0 .

- ✚ L'amplitude du mouvement est décroissante dans le temps.

- Les conditions initiales sont données par : $x(0) = x_0$ et $v(0) = v_0$

$$x(0) = C \cos(-\varphi) = x_0 \quad (1)$$

et

$$v(0) = -\gamma C \cos(-\varphi) - \omega_a C \sin(-\varphi) = v_0$$

Ou encore :

$$-\gamma C \cos(\varphi) + \omega_a C \sin(\varphi) = v_0 \quad (2)$$

En remplaçant (1) dans (2) on trouve :

$$-\gamma x_0 + \omega_a C \sin(\varphi) = v_0$$

Ou encore :

$$C \sin(\varphi) = \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_a} \quad (3)$$

En sommant les carrés des équations (1) et (3), on obtient :

$$C^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_a} \right)^2$$

Ce qui donne :

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_a} \right)^2} = 0.15 \text{ m}$$

D'autre part, le rapport entre les deux équations (3) et (1) donne:

$$\tan(\varphi) = \frac{v_0 + \gamma x_0}{x_0 \omega_a} = \frac{1}{0,866} = 1,155$$

Ce qui donne $\varphi = 49,11$ degré, ce qui correspond à $\varphi = 0,857$ rad

- L'équation horaire du mouvement s'écrit donc :

$$x(t) = 0,15e^{-5t} \cos(8,66 t - 0,86)$$

- L'énergie emmagasinée dans le système à $t=0$ s est égale à :

$$E_T(0) = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} [0,1(0,5)^2 + 10(0,1)^2] = 0,062 \text{ Joules}$$

- L'énergie emmagasinée dans le système à la fin de la première pseudo-période est égale à l'énergie dans le système à $t=0$ s à laquelle on retranche l'énergie dissipée par frottement pendant la première pseudo-période T_a , à savoir :

$$E_T(T_a) = E_T(0) - \int_0^{T_a} \dot{x}^2 dt$$

$$E_T(T_a) = 0,062$$

$$- \int_0^{T_a} (-0,15e^{-5t} \cos(8,66 t - 0,86) - 1,30e^{-5t} \sin(8,66 t - 0,86))^2 dt$$

- L'équation différentielle générale d'un système amorti forcé est donnée par :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

Ou encore

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

✚ Par identification, on trouve :

- ✓ L'amplitude de la force extérieure est égale à $F_0 = 1$ N
- ✓ Et la pulsation de la force extérieure $\omega = 10$ Rad
- La pulsation de résonance est donnée par :

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = 7,07 \text{ Rad}$$

Alors que la masse oscille, en régime permanent, à la même pulsation que la force extérieure $\omega = 10$ rad. Par conséquent, la masse n'oscillera pas en résonance.

- L'amplitude de mouvement de la masse en régime permanent est donnée par :

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

$$A(10) = \frac{10}{\sqrt{(100-100)^2 + 4.25.100}} = 0.1m$$

- ✚ Le déphasage entre la réponse de la masse et la force extérieure est donnée par :

$$\tan \varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{100}{100 - 100}$$

Ce qui donne $\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad

- L'équation horaire du mouvement en régime permanent est donnée par :

$$x(t) = A(\omega) \sin(\omega t - \varphi)$$

Ce qui donne :

$$x(t) = 0.1 \sin\left(10t - \frac{\pi}{2}\right) = -0.1 \cos(10t)$$

- L'énergie fournie par la force extérieures pendant le temps $t = \left[\frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right]$ est donnée par :

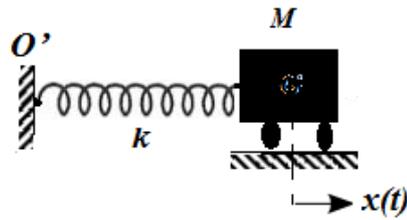
$$E = \int_{\frac{3\pi}{5}}^{\frac{4\pi}{5}} F(t) \dot{x}(t) dt$$

- ✚ On remarque que cet intervalle de temps $t = \left[\frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right]$ correspond à une période d'oscillation de la masse en régime permanent.

$$E = \int_{\frac{3\pi}{5}}^{\frac{4\pi}{5}} \sin(10t) \sin(10t) dt = \int_{\frac{3\pi}{5}}^{\frac{4\pi}{5}} \sin^2(10t) dt = \int_{\frac{3\pi}{5}}^{\frac{4\pi}{5}} \frac{1 - \sin(20t)}{2} dt = \frac{\pi}{10} \text{ Joule}$$

Problème 2:10pts

Partie A



- Le vecteur de position est égal à :

$$o\vec{m} = x\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{x}\vec{i}$$

- L'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

- L'énergie potentielle pour des petites oscillations, s'écrit sous la forme:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

- Alors, le Lagrangien du système est de la forme:

$$L(x, \dot{x}) = E_c - E_p = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

- ✓ L'équation de mouvement est de la forme :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

D'ou

$$M\ddot{x} + kx = 0 \Leftrightarrow m\ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

- ✓ La pulsation propre est égale :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{M}$$

- ✓ La solution de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Partie B :

- Le système a deux degrés de liberté exprimés en x et θ
- Pour l'énergie cinétique on a:

$$E_c = \frac{1}{2} M V_M^2 + \frac{1}{2} m V_m^2$$

En calculant les vitesses par rapport au repère fixe :

$$\begin{cases} O\vec{m} = \begin{pmatrix} x_m = x + l \sin \theta \\ y_m = l \cos \theta \end{pmatrix} & \Rightarrow & \begin{cases} \vec{V}_m = \begin{pmatrix} \dot{x}_m = \dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta \\ y_m = -l \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} \\ \\ O\vec{M} = \begin{pmatrix} x_M = x \\ y_M = 0 \end{pmatrix} & \Rightarrow & \begin{cases} \vec{V}_M = \begin{pmatrix} \dot{x}_M = \dot{x} \\ \dot{y}_M = 0 \end{pmatrix} \end{cases} \end{cases}$$

D'où :

$$E_c = \frac{1}{2} [(M + m) \dot{x}^2 + m(l \dot{\theta})^2] + m \dot{x} l \dot{\theta} \cos \theta$$

- Pour l'énergie potentielle on a:

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 - mgl \cos \theta$$

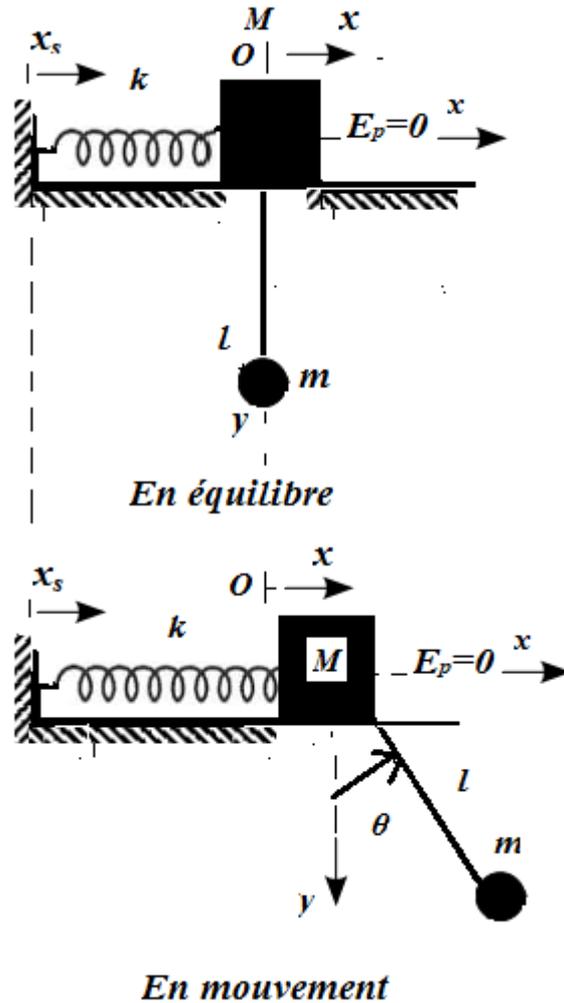


Figure 3: Différents états du système

- On déduit, le Lagrangien comme suit :

$$L(\dot{x}, x, \dot{\theta}, \theta) = \frac{1}{2} [(M + m)\dot{x}^2 + m(l\dot{\theta})^2] + m\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{2} kx^2 + mgl \cos \theta$$

- Après calcul ; le système différentiel s'exprime comme suit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + kx = 0 \\ l\ddot{\theta} + g\theta + \dot{x} = 0 \end{cases}$$

- Les pulsations propres ω_{1p} et ω_{2p} :

❖ On considère les solutions du système de type sinusoïdales :

$$\begin{cases} \theta(t) = Be^{j(\omega_p t + \varphi)} \\ x(t) = Ae^{j(\omega_p t + \varphi)} \end{cases}$$

- ❖ En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire symétrique suivant :

$$\begin{cases} [-(M+m)\omega_p^2 + k]A - ml\omega_p^2 B = 0 \\ -\omega_p^2 A + [-\omega_p^2 l + g]B = 0 \end{cases}$$

- ❖ Le système admet des solutions non nulles si seulement si :

$$\det = 0$$

D'où

$$[-(M+m)\omega_p^2 + k][- \omega_p^2 l + g] - ml\omega_p^4 = 0$$

On obtient alors :

$$Ml\omega_p^4 - [(M+m)g + kl]\omega_p^2 + kg = 0 \quad \text{Avec} \quad \Delta = [(M+m)g + kl]^2 - 4kgM > 0$$

Il existe donc deux pulsations propres sont ω_{1p}^2 et ω_{2p}^2 comme suit :

$$\begin{cases} \omega_{1p}^2 = \frac{1}{2} [(M+m)g + kl + \sqrt{[(M+m)g + kl]^2 - 4kgM}] \\ \omega_{2p}^2 = \frac{1}{2} [(M+m)g + kl - \sqrt{[(M+m)g + kl]^2 - 4kgM}] \end{cases}$$

- Les solutions générales :

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \cos(\omega_{1p}t + \varphi) + A_2 \cos(\omega_{2p}t + \varphi) \\ \theta(t) = B_1 \cos(\omega_{1p}t + \varphi) + B_2 \cos(\omega_{2p}t + \varphi) \end{cases}$$

- La forme des solutions générales lorsqu'on a :

- ❖ M tend vers l'infini :

Le système devient alors un pendule simple régit par l'équation différentielle :

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Avec la pulsation propre : $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

Et représenté comme suit dans la figure 4:

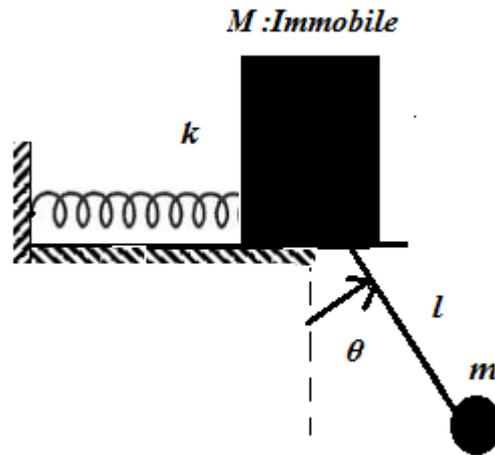


Figure 4 : système est équivalent à un pendule simple

❖ l tend vers 0 :

Le système devient dans ce cas un simple oscillateur harmonique régi par l'équation différentielle :

$$(M + m)\ddot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{M + m}x = 0$$

Avec la pulsation propre : $\omega_0^2 = \frac{k}{M + m}$

Et représenté comme suit dans la figure 5:



Figure 5 : Système est équivalent à un oscillateur simple