DEVOIR SURVEILLE

Module **: Vibrations et Ondes mécanique**
Durée **: 2 Heures.**

NB : Le sujet d'examen contient deux problèmes sur 10pts.

Problème 1 :« 10pts »

Partie A : Soit une masse *m=0.1 kg*, attachée à un ressort de raideur *k*, qui a un mouvement selon la coordonnée cartésienne *x et* qui est gouvernée par l'équation du mouvement suivante :

$$\ddot{x} + 10\dot{x} + 100x = 0$$

- Selon l'équation différentielle ci-dessus, quelles sont les forces agissant sur la masse *m* ? (donner le type et l'expression).
- En déduire la valeur numérique de la pulsation propre du système, la constante de raideur *k*, le coefficient de frottement et le facteur d'amortissement.
- Vérifier que le mouvement du système est oscillatoire amorti.
- En déduire la pseudo-pulsation et la pseudo-période du mouvement amorti.
- Ecrire dans ce cas l'équation générale du mouvement du système (sans refaire les calculs) puis commenter son allure.
- A l'instant initial *t=0*, la masse est lâchée avec une vitesse initiale $v_0 = 0.5\, m/s$ à la distance $x_0 = 0.1\, m$ dans le sens positif de *x* ; écrire l'équation horaire du mouvement.
- Calculer l'énergie emmagasinée dans le système à *t=0s*.
- Ecrire l'expression de l'énergie emmagasinée dans le système après un temps $t = T_a$.

Partie B : La masse $\boldsymbol{m}$ est maintenant soumise à une force extérieure sinusoïdale. L'équation du mouvement correspondante s'écrit sous la forme :

$$\ddot{x} + 10\dot{x} + 100x = 10 \sin 10t$$

- En déduire l'amplitude et la pulsation de la force extérieure appliquée.
- La masse oscillera-t-elle, dans ce cas, en résonnance ? Expliquer.
- Calculer, en régime permanent, l'amplitude du mouvement de la masse et son déphasage par rapport à la force extérieure.
- En déduire l'expression de l'équation horaire du mouvement de la masse en régime permanent.
- Calculer l'énergie fournie au système par la force extérieure pendant l'intervalle de temps $\boldsymbol{t} = \left[\frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right]$.

Problème 2 :« 10pts »

Partie A : Soit un chariot de masse *M* relié à un ressort de raideur *k*, qui glisse sans frottement sur le plan horizontal comme le montre la figure 1,

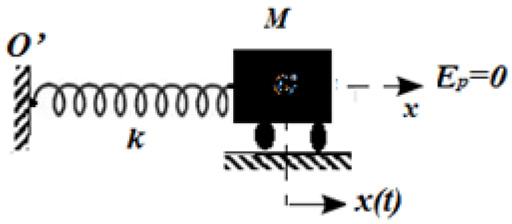


Figure 1 : Mouvement oscillatoire libre

Dans le cas des petites oscillations :

- Déterminer le Lagrangien du système.
- Etablir l'équation différentielle du mouvement et en déduire la pulsation propre.
- Déterminer la solution générale avec les conditions initiales.

$$x(t=0)=0 \qquad et \qquad \dot{x}(t=0)=\dot{x}_0$$

Partie B : Le système est maintenant couplé à un pendule simple de longueur *l*= *OA* et de masse *m*, comme le montre la figure 2 :

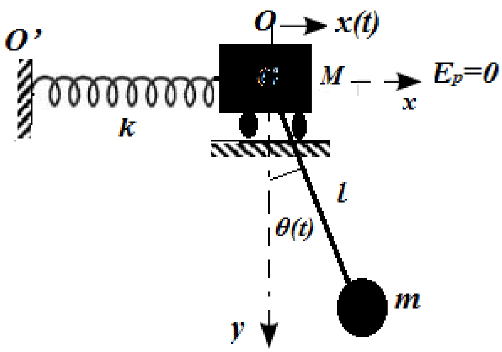


Figure 2: Couplage pendule simple avec un oscillateur harmonique

Dans le cas des petites oscillations :

- Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.
- En déduire le Lagrangien du système.
- Montrer que les équations différentielles du mouvement s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{x}+ml\ddot{\theta}+kx=0\\ l\ddot{\theta}+\ddot{x}+g\theta=0\end{cases}$$

- On considère les solutions du système de type sinusoïdal :

$$\begin{cases}\theta(t)=Be^{j(\omega_p t+\varphi)}\\ x(t)=Ae^{j(\omega_p t+\varphi)}\end{cases}$$

Déterminer les pulsations propres ω_{1p} *et* ω_{2p}.

- Déterminer les solutions générales $x(t)$ *et* $\theta(t)$**.**
- Etudier les solutions générales du mouvement dans les **deux cas suivants** :
  - *M* tend vers l'infini
  - *l* tend vers *0*.

Discuter et Justifier.

BONNE CHANCE

Equipe Modulaire :
Vibrations et Ondes mécaniques

SOLUTIONS

Problème 1 :10pts

- L'équation différentielle générale du mouvement s'écrit sous la forme :

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$$

- ✓ Donc en réarrangeant l'équation du mouvement donnée et en multipliant les deux termes par *m=0.1*, on obtient :

$$0.1\ddot{x} = -\dot{x} - 10x$$

Cela signifie que la masse est soumise à deux forces :

- ✓ La force de rappel dérivant d'un potentiel (énergie potentielle élastique du ressort) qui s'écrit sous la forme suivante :

$$F_r = -10x$$

- ✓ Et une force de frottement de type visqueux (proportionnelle à la vitesse de la masse m) que subit la masse :

$$F_f = -\dot{x}$$

- L'équation différentielle peut se mettre sous la forme:

$$m\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Par identification on obtient :

- ✓ La pulsation propre $\omega_0 = 10$ rad/s
- ✓ La constante de raideur k=10 n/m
- ✓ Le coefficient de frottement $\alpha = 1$ kg/s
- ✓ Le facteur d'amortissement $\gamma = 5s^{-1}$
- On vérifie bien que : $\gamma < \omega_0$

L'amortissement est donc faible ; ce qui provoque un mouvement oscillatoire mais amorti.

- La pseudo-pulsation du mouvement oscillatoire amorti est donne par :

$$\boldsymbol{\omega_a} = \sqrt{\boldsymbol{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \sqrt{\mathbf{100 - 25}} = \mathbf{8.66}\ rad/s$$

  - La pseudo-période est donnée par :

$$\boldsymbol{T_a} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{\omega_a}} = \mathbf{0.72}\ s$$

- Dans le cas d'un mouvement oscillatoire amorti, l'équation horaire s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{x(t) = Ce^{-\gamma t}\cos(\omega_a t - \varphi)}$$

- Le mouvement est oscillatoire par la présence du terme cosinus a une pseudo-pulsation $\boldsymbol{\omega_a}$ differente de la pulsation propre du système $\boldsymbol{\omega_0}$.
- L'amplitude du mouvement est décroissante dans le temps.
- Les conditions initiales sont données par :$\boldsymbol{x(0) = x_0}$ et $\boldsymbol{v(0) = v_0}$

$$\boldsymbol{x(0) = C\cos(-\varphi) = x_0} \qquad (1)$$

et

$$\boldsymbol{v(0) = -\gamma C\cos(-\varphi) - \omega_a C\sin(-\varphi) = v_0}$$

Ou encore :

$$\boldsymbol{-\gamma C\cos(\varphi) + \omega_a C\sin(\varphi) = v_0} \qquad (2)$$

En remplaçant (1) dans (2) on trouve :

$$\boldsymbol{-\gamma x_0 + \omega_a C\sin(\varphi) = v_0}$$

Ou encore :

$$\boldsymbol{C\sin(\varphi) = \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_a}} \qquad (3)$$

En sommant les carres des équations (1) et (3), on obtient :

$$\boldsymbol{C^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_a}\right)^2}$$

Ce qui donne :

$$\boldsymbol{C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_a}\right)^2}} = 0.15m$$

D'autre part, le rapport entre les deux équations (3) et (1) donne:

$$\tan(\varphi) = \frac{v_0 + \gamma x_0}{x_0 \omega_a} = \frac{1}{0,866} = 1,155$$

Ce qui donne $\varphi = 49,11$ degré, ce qui correspond a $\varphi = 0,857$ *rad*

- L'équation horaire du mouvement s'écrit donc :

$$x(t) = 0.15e^{-5t}\cos(8.66\,t - 0.86)$$

- L'énergie emmagasinée dans le système a t=0s est égale à :

$E_T(0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}[0.1(0.5)^2 + 10(0.1)^2] = 0.062$ Joules

- L'énergie emmagasinée dans le système à la fin de la première pseudo-période est égale à l'énergie dans le système a t=0s à laquelle on retranche l'énergie dissipée par frottement pendant la première pseudo-période T_a, à savoir :

$$E_T(T_a) = E_T(0) - \int_0^{T_a} \dot{x}^2 dt$$

$$E_T(T_a) = 0.062 - \int_0^{T_a} (-0.15e^{-5t}\cos(8.66\,t - 0.86) - 1.30e^{-5t}\sin(8.66\,t - 0.86))^2 dt$$

- L'équation différentielle générale d'un système amorti forcé est donnée par :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 \sin\omega\, t$$

Ou encore

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega\, t$$

Par identification, on trouve :

- ✓ L'amplitude de la force extérieure est égale à $F_0 = 1$N
- ✓ Et la pulsation de la force extérieure $\omega = 10$ Rad
- La pulsation de résonance est donnée par :

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = 7.07 \text{ Rad}$$

Alors que la masse oscille, en régime permanent, à la même pulsation que la force extérieure $\boldsymbol{\omega = 10}$ rad. Par conséquent, la masse n'oscillera pas en résonance.

- L'amplitude de mouvement de la masse en régime permanent est donnée par :

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$A(10) = \frac{10}{\sqrt{(100-100)^2+4.25.100}} = 0.1m$$

- Le déphasage entre la réponse de la masse et la force extérieure est donnée par :

$$\tan\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{100}{100 - 100}$$

Ce qui donne $\varphi = \frac{\pi}{2}$rad

- L'équation horaire du mouvement en régime permanent est donnée par :

$$x(t) = A(\omega)\sin(\omega t - \varphi)$$

Ce qui donne :

$$x(t) = 0.1\sin\left(10t - \frac{\pi}{2}\right) = -0.1\cos(10t)$$

- L'énergie fournie par la force extérieures pendant le temps $t = \left[\frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right]$ est donnée par :

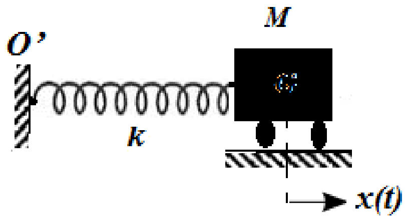
$$E = \int_{\frac{3\pi}{5}}^{\frac{4\pi}{5}} F(t)\dot{x}(t)\, dt$$

- On remarque que cet intervalle de temps $t = \left[\frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right]$ correspond à une période d'oscillation de la masse en régime permanent.

$$E = \int_{\frac{3\pi}{5}}^{\frac{4\pi}{5}} \sin(10t)\sin(10t)\, dt = \int_{\frac{3\pi}{5}}^{\frac{4\pi}{5}} \sin^2(10t)\, dt = \int_{\frac{3\pi}{5}}^{\frac{4\pi}{5}} \frac{1-\sin(20t)}{2}\, dt = \frac{\pi}{10}\ \text{Joule}$$

Problème 2:10pts

Partie A



- **Le vecteur de position** est égal à :

$$\vec{om} = x\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{x}\vec{i}$$

- L'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

- L'énergie potentielle pour des petites oscillations, s'écrit sous la forme:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

- Alors, **le Lagrangien du système** est de la forme:

$$L(x;\dot{x}) = E_c - E_p = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

✓ **L'équation de mouvement** est de la forme :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

D'ou

$$M\ddot{x} + kx = 0 \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

✓ **La pulsation propre** est égale :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{M}$$

✓ **La solution de l'équation différentielle** s'écrit alors :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

Partie B :

- Le système a deux degrés de liberté exprimés en ***x*** et θ

- Pour l'énergie cinétique on a:

$$E_c = \frac{1}{2}MV_M^2 + \frac{1}{2}mV_m^2$$

En calculant les vitesses par rapport au repère fixe :

$$\begin{cases} O\vec{m} = \begin{pmatrix} x_m = x + l\sin\theta \\ y_m = l\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \vec{V}_m = \begin{pmatrix} \dot{x}_m = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta \\ y_m = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix} \right. \\ O\vec{M} = \begin{pmatrix} x_M = x \\ y_M = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \vec{V}_M = \begin{pmatrix} \dot{x}_M = \dot{x} \\ \dot{y}_M = 0 \end{pmatrix} \right. \end{cases}$$

D'où :

$$E_c = \frac{1}{2}[(M+m)\dot{x}^2 + m(l\dot{\theta})^2] + m\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta$$

- Pour l'énergie potentielle on a:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 - mgl\cos\theta$$

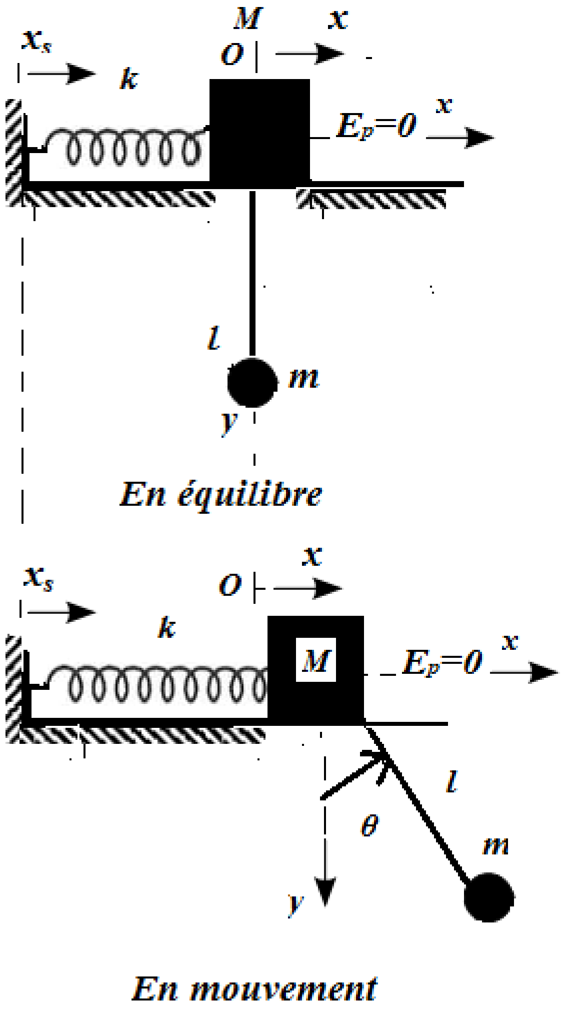


Figure 3: Différents états du système

- On déduit, le Lagrangien comme suit :

$$L(\dot{x},x,\dot{\theta},\theta)=\frac{1}{2}[(M+m)\dot{x}^2+m(l\dot{\theta})^2]+m\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta-\frac{1}{2}kx^2+mgl\cos\theta$$

- Après calcul ; le système différentiel s'exprime comme suit :

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial x}=0\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial \theta}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(M+m)\ddot{x}+ml\ddot{\theta}+kx=0\\ l\ddot{\theta}+g\theta+\ddot{x}=0\end{cases}$$

- Les pulsations propres ω_{1p} et ω_{2p}:
  - ❖ On considère les solutions du système de type sinusoïdales :

$$\begin{cases}\theta(t)=Be^{j(\omega_p t+\varphi)}\\ x(t)=Ae^{j(\omega_p t+\varphi)}\end{cases}$$

- En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire symétrique suivant :

$$\begin{cases} [-(M+m)\omega_p^2 + k]A - ml\omega_p^2 B = 0 \\ -\omega_p^2 A + [-\omega_p^2 l + g]B = 0 \end{cases}$$

- Le système admet des solutions non nulles si seulement si :

$$det = 0$$

D'ou

$$[-(M+m)\omega_p^2 + k][-\omega_p^2 l + g] - ml\omega_p^4 = 0$$

On obtient alors :

$$Ml\,\omega_p^4 - [(M+m)g + kl]\omega_p^2 + kg = 0 \quad Avec \quad \Delta = [(M+m)g + kl]^2 - 4kgM \succ 0$$

Il existe donc deux pulsations propres sont ω_{1p}^2 *et* ω_{2p}^2 comme suit :

$$\begin{cases} \omega_{1p}^2 = \dfrac{1}{2}[(M+m)g + kl + \sqrt{[(M+m)g + kl]^2 - 4kgM}\ ] \\ \omega_{1p}^2 = \dfrac{1}{2}[(M+m)g + kl - \sqrt{[(M+m)g + kl]^2 - 4kgM}\ ] \end{cases}$$

- Les solutions générales :

$$\begin{cases} x(t) = A_1 cos(\omega_{1p}t + \varphi) + A_2 cos(\omega_{2p}t + \varphi) \\ \theta(t) = B_1 cos(\omega_{1p}t + \varphi) + B_2 cos(\omega_{2p}t + \varphi) \end{cases}$$

- La forme des solutions générales lorsqu'on a :
  - *M* tend vers l'infini :

    Le système devient alors un pendule simple régit par l'équation différentielle :

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Avec la pulsation propre : $\omega_0^2 = \dfrac{g}{l}$

Et représenté comme suit dans la figure 4:

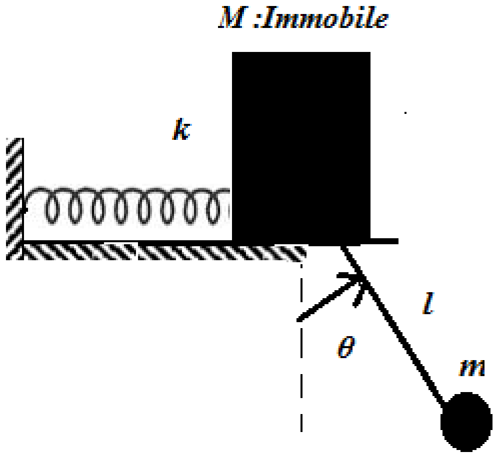


Figure 4 : système est équivalent à un pendule simple

❖ *l* tend vers *0* :

Le système devient dans ce cas un simple oscillateur harmonique régis par l'équation différentielle :

$$(M+m)\ddot{x}+kx=0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}+\frac{k}{M+m}x=0$$

Avec la pulsation propre : $\omega_0^2=\dfrac{k}{M+m}$

Et représenté comme suit dans la figure 5:

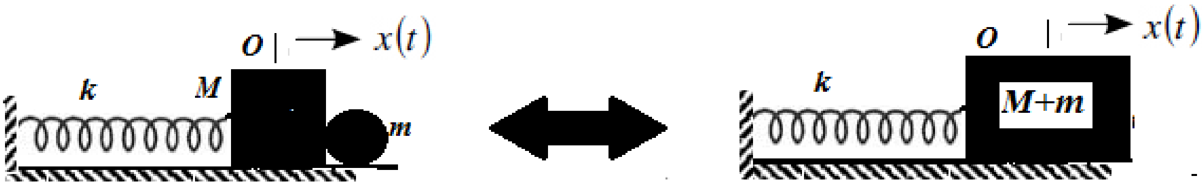


Figure 5 : Système est équivalent à un oscillateur simple