REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
ECOLE SUPERIEURE DES SCIENCES APPLIQUEES –TLEMCEN–
المدرسة العليا في العلوم التطبيقية -تلمسان-

Module : **Vibrations** Année Universitaire : **2016-2017**

CORRIGE TYPE DU DEVOIR SURVEILLE

Question de cours

1. **LE SUPPORT EST FIXE**

   Le Lagrangien du système :

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

- **L'équation différentielle :**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \qquad m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

D'OU :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad Avec \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \xi = \frac{\alpha}{2m\omega_0}$$

- **La résolution de l'équation du mouvement :**

$$r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$
$$\Delta' = (\xi\omega_0)^2 - \omega_0^2 = -\omega_0^2(1-\nu) = j^2\varpi^2 \prec 0 \quad \xi \prec 1$$

❖ **Le système a un mouvement oscillatoire amorti.**

❖ **La solution est de la forme :**

$$x(t) = Ae^{-\nu\omega_0 t}\cos(\varpi t + \varphi)$$

En appliquant les conditions initiales :

$$t = 0, x = 0 \Rightarrow \qquad \cos\varphi = 0 \Rightarrow \quad \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$t = 0, \dot{x} = v_0 \Rightarrow \quad A = \frac{v_0}{\varpi} \quad avec \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

La solution finale sera exprimée comme suit :

$$x(t) = \frac{v_0}{\varpi} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \varpi t$$

2. Le support est mobile :

Le mouvement du système est schématisé dans la figure 1 comme suit :

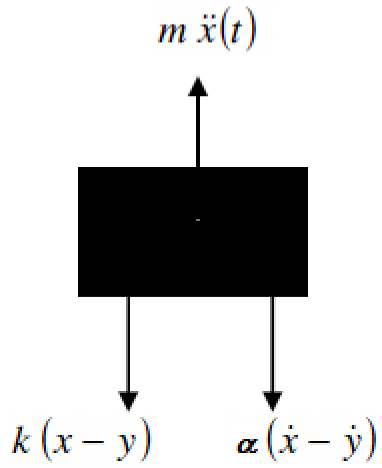


FIGURE 1 : Mouvement force de l'ensemble (support + machine)

- **le Lagrangien du système s'écrit :**

  L'énergie cinétique s'exprime:

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

Pour l'énergie potentielle on a :

$$E_p = \frac{1}{2} k(x-y)^2$$

D'ou le Lagrangien du système s'écrit :

$$L(\dot{x},x)=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}k(x-y)^2$$

- **L'équation du mouvement s'écrit sous la forme :**

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})-\frac{\partial L}{\partial x}=\sum \overline{F}_{ext} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x}(t)+k[x(t)-y(t)]=-\alpha[\dot{x}(t)-\dot{y}(t)]$$

D'ou :

$$m\ddot{x}(t)+\alpha\dot{x}(t)+kx(t)=\alpha\dot{y}(t)+ky(t)$$

C'est une équation différentielle non homogène.

- **La solution de l'équation différentielle:**

En posant les constantes suivantes :

$$\omega_0^2=\frac{k}{m} \quad et \quad 2\xi=\frac{\alpha}{m\omega_0}$$

L'équation du mouvement se réécrit avec les nouvelles constantes :

$$m\ddot{x}(t)+2\xi\omega_0\dot{x}(t)+\omega_0^2x(t)=2\xi\omega_0\dot{y}(t)+\omega_0^2y(t)$$

On considère que le support possède un déplacement sinusoïdal :

$$y(t)=B\cos\omega t=Re\{Be^{j\omega t}\}$$

On chercher des solutions de la forme :

$$x(t)=A\cos(\omega t-\phi)=Re\{Ae^{j(\omega t-\phi)}\}$$

L'équation du mouvement devient alors :

$$(-\omega^2+j2\xi\omega_0\omega+\omega_0^2)Ae^{-j\phi}=(j2\xi\omega_0\omega+\omega_0^2)B$$

Le rapport des modules des amplitudes s'écrit sous la forme:

$$T=\left|\frac{A}{B}\right|=\omega_0\left[\frac{(2\xi\omega)^2+\omega_0^2}{(-\omega^2+\omega_0^2)^2+(2\xi\omega_0\omega)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

- **En posant la constante :**

$$r = \frac{\omega}{\omega_0}\,,$$

La courbe de la fonction *t(r)* est décrite comme suit:

$$T = \left|\frac{A}{B}\right| = \left[\frac{(2\xi r)^2 + 1}{(-r^2+1)^2 + (2\xi r)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Pour r=1

$$T = \left|\frac{A}{B}\right| = \left[\frac{(2\xi)^2 + 1}{(2\xi)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad T = \left[1 + \frac{1}{(2\xi)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

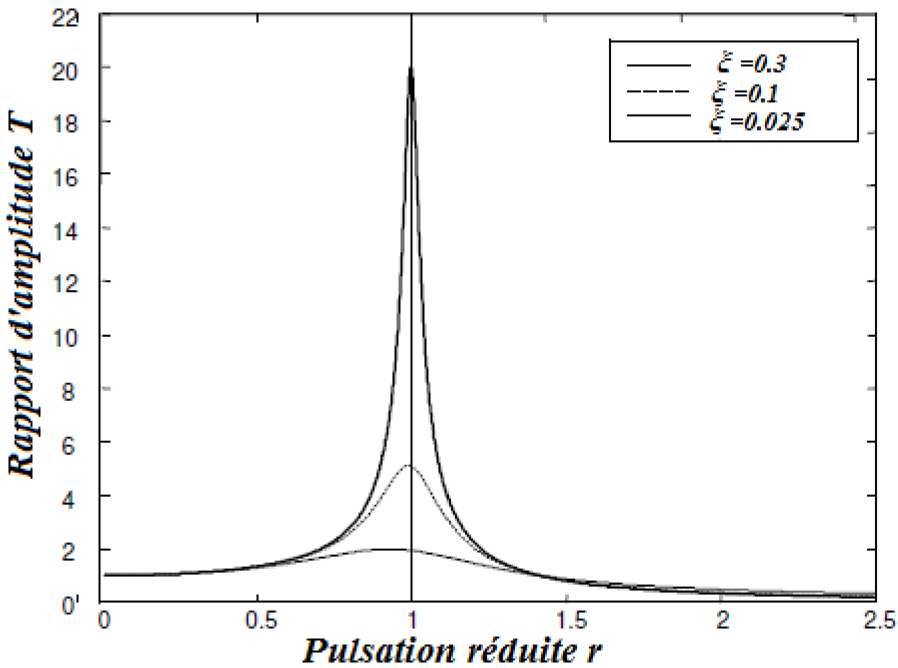


Figure 2 : rapport de transmissibilité en déplacement en fonction de la pulsation réduite

Problème :

1- Les relations entre les coordonnées sont :

$x = r\theta,\ y = 2r\theta$ et $y = 2x$

2- Energie cinétique : $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M(2r)^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}(m+2M)\dot{x}^2$

3- Energie potentielle : $U = \frac{1}{2}kx^2$

4- Le Lagrangien : $L = \frac{1}{2}(m+2M)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$

5- Fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2 = \frac{1}{2}4\alpha\dot{x}^2 = 2\alpha\dot{x}^2$

6- Equation différentielle :

$$(m+2M)\ddot{x} + kx + 4\alpha\dot{x} = 0$$

Ou encore

$$\ddot{x} + \frac{k}{(m+2M)}x + \frac{4\alpha}{(m+2M)}\dot{x} = 0$$

7- La pulsation propre du système :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{(m+2M)}} = \sqrt{\frac{8}{(1+1)}} = 2\frac{rad}{s}$$

Le facteur d'amortissement :

$$\gamma = \frac{2\alpha}{(m+2M)} = \frac{4\sqrt{2}}{(1+1)} = 2\sqrt{2}\frac{1}{s}$$

8- Puisque $\gamma > \omega_0$ le système est soumis à un amortissement fort. Il va donc exécuter un mouvement amorti apériodique.

9- La solution générale est donnée par :

$$x(t) = \exp(-\gamma t)\left[A\exp\left(-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t\right) + B\exp\left(\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t\right)\right] = \exp\left(-2\sqrt{2}t\right)\left[A\exp(-2t) + B\exp(2t)\right]$$

10- Pour que la masse dépasse sa position d'équilibre il faut que $x(t) = 0$, c'est-à-dire :

$$x(t) = \exp\left(-2\sqrt{2}t\right)\left[A\exp(-2t) + B\exp(2t)\right] = 0$$

Ou encore

$$A\exp(-2t) + B\exp(2t) = 0$$

En multipliant les deux termes de l'équation par $\exp(2t)$ on obtient :

$$A + B\exp(4t) = 0$$

Ou encore

$$\exp(4t) = -\frac{A}{B}$$

Avec

$$t = \frac{1}{4}\ln\left(-\frac{A}{B}\right)$$

La première condition pour que t une valeur est que le rapport $-\frac{A}{B}$ soit positif.

La deuxième condition pour que t soit positif est que $\frac{|A|}{|B|} > 0$.

11- En remplaçant les conditions initiales dans l'équation du mouvement, on trouve :

$$x(0) = [A + B] = 1m$$

Et

$$\dot{x}(0) = -2\sqrt{2}[A + B] + 2[-A + B] = -5\frac{m}{s}$$

Ou encore

$$-2\sqrt{2} + 2[-A + B] = -5$$

Ce qui donne

$$B - A = \frac{-5 + 2\sqrt{2}}{2}$$

En combinant l'équation ci-dessus et la première équation, on trouve :

$$2B = \frac{-5 + 2\sqrt{2}}{2} + 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2} + \frac{-5 + 2\sqrt{2}}{4} = -0.043$$

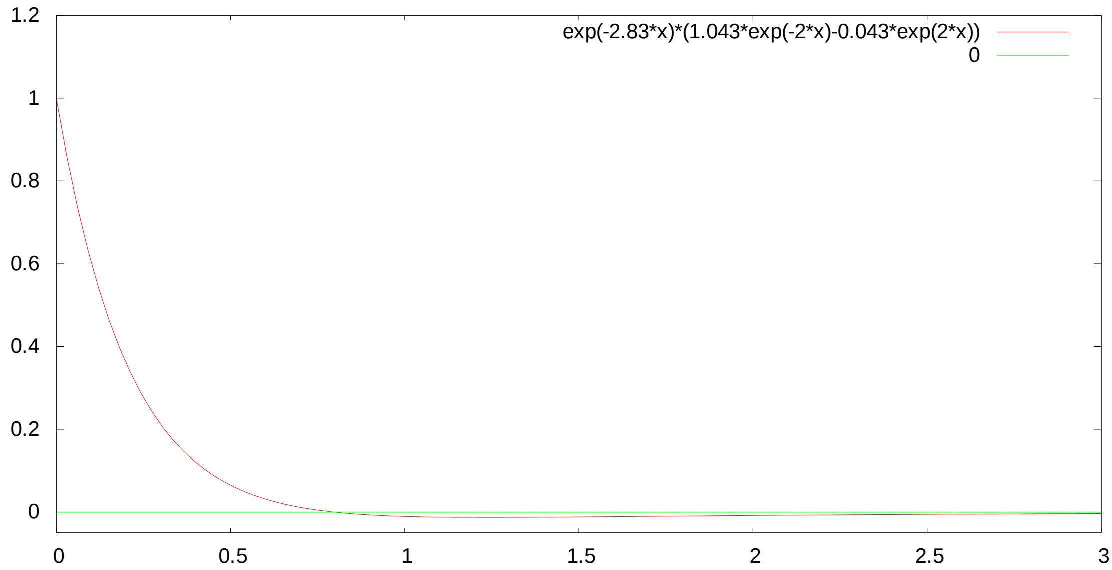
Et

$$A = 1 + 0.043 = 1.043$$

Les constantes A et B vérifient les conditions ci-dessus ; le système dépassera donc dans ce cas sa position d'équilibre.

$$x(t) = \exp\left(-2\sqrt{2}t\right)\left[1.043\exp(-2t) - 0.043B\exp(2t)\right]$$

12- Effectivement, les conditions initiales données causent un mouvement apériodique où la masse *m* dépassera sa position d'équilibre pour aller de l'autre coté, sauf qu'elle ne peut pas dépasser sa position d'équilibre une deuxième fois. C'est pour cette raison que le mouvement est appelé apériodique.



exp(-2.83*x)*(1.043*exp(-2*x)-0.043*exp(2*x))
0
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3