

MECANIQUE RATIONNELLE 1 - CORRIGE DU DEVOIR SURVEILLE N°01**Exercice 01:** (noté sur 6pts)1. Les éléments de réduction du torseur $[T]_O$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{0,5} \\ \vec{M}_O = \underbrace{\overline{OA} \wedge \vec{V}_1 + \overline{OB} \wedge \vec{V}_2 + \overline{OC} \wedge \vec{V}_3}_{0,5} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{01} \end{array} \right.$$

$$2. \text{L'auto-moment : } A = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 2 - 3 = -5 \rightarrow \boxed{01}$$

$$\boxed{0,5}$$

$$3. \text{Le pas du torseur : } P = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R^2} = \frac{A}{R^2} = \frac{-5}{10} = -0.5 \rightarrow \boxed{0,5}$$

$$\boxed{0,5}$$

$$4. \text{L'axe central: } \vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{R^2} + \alpha \vec{R} = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{10} + \alpha \\ \frac{1}{10} + 3\alpha \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{10} + \alpha \\ z = \frac{1}{10} + 3\alpha \end{cases}$$

$$\boxed{0,5} \quad \boxed{01}$$

D'où : $\begin{cases} x=0.5 \\ z=3y+1 \end{cases}$ l'axe central est une droite dans le plan d'équation $z=3y+1$ situé à $x=0.5$

Exercice 02: (noté sur 6pts)1. Calculer le vecteur \vec{U}_M au point O.

$$\begin{cases} U_x = (a + (1-b)x + by - bz) \\ U_y = (-2a - bx + (b-1)y + bz) \\ U_z = (a + bx - by + (1-b)z) \end{cases}$$

$$\vec{U}_O = \begin{vmatrix} a \\ -2a \\ a \end{vmatrix} \quad \boxed{0,5}$$

2. Anti-symétriser ce champ:

$$\text{Le champ est antisymétrique si : } \vec{U}_M \cdot \overline{OM} = \vec{U}_O \cdot \overline{OM} \quad \boxed{0,5}$$

$$\vec{U}_M \cdot \vec{OM} = ax + x^2 - bx^2 + bxy - bxz - 2ay - bxy + by^2 - y^2 + byz + az + bxz - byz + z^2 - bz^2$$

$$\vec{U}_O \cdot \vec{OM} = ax - 2ay + az$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 + z^2 = b(x^2 - y^2 + z^2) \Rightarrow b = 1 \quad \boxed{01}$$

Le champ est un torseur pour $b=1$:

$$\begin{cases} U_x = a + y - z \\ U_y = -2a - x + z \\ U_z = a + x - y \end{cases}$$

3. Les éléments de réduction au point O du torseur associé :

$$[T]_O = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{U}_O \end{cases}$$

$$x = y = z = 0 \Rightarrow \vec{U}_O = \begin{pmatrix} a \\ -2a \\ a \end{pmatrix} \quad \boxed{0,5}$$

Pour calculer la résultante, on applique la formule des transports des moments:

$$\vec{U}_M = \vec{U}_O + \vec{MO} \wedge \vec{R} \quad \boxed{0,5}$$

$$\begin{pmatrix} a + y - z \\ -2a - x + z \\ a + x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -2a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y - z + yR_z - zR_y = 0 \\ -x + z + zR_x - xR_z = 0 \\ x - y + xR_y - yR_x = 0 \end{cases}$$

Après, la résolution du système d'équations, on trouve : $R_x = -1; R_y = -1; R_z = -1$

$$\text{Enfin, } [T]_O = \begin{cases} \vec{R} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{U}_O = \begin{pmatrix} a \\ -2a \\ a \end{pmatrix} \end{cases} \quad \boxed{01}$$

4. a. La nature du torseur pour $a=0$ et $a \neq 0$:

$$A = \vec{U}_O \cdot \vec{R} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \boxed{0,5}$$

C'est un torseur glisseur dans les deux cas.

$$A = \vec{U}_O \cdot \vec{R} = \begin{vmatrix} a & -1 \\ -2a & -1 \\ a & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \boxed{0,5}$$

4. b. L'axe central du torseur dans les deux cas :

Pour $a=0$:

$$\vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{U}_O}{R^2} + \alpha \vec{R} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad \text{l'axe central est parallèle à la résultante.}$$

$\boxed{0,5}$

Pour $a \neq 0$:

$$\vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{U}_O}{R^2} + \alpha \vec{R} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a \\ -2a \\ a \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -3a \\ 0 \\ 3a \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a - \alpha \\ -\alpha \\ a - \alpha \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -a - \alpha \\ y = -\alpha \\ z = a - \alpha \end{cases} \Rightarrow x + z - 2y = 0$$

$\boxed{0,5}$

Exercice 03: (noté sur 8pts)

1. Les éléments de réduction du torseur résultant au pt A :

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \sum \vec{F}_i \\ \vec{M}_A = \sum \vec{M}_i \end{cases}$$

$$\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_K + \vec{F}_H + \vec{F}_I + \vec{F}_F = \begin{vmatrix} 0 \\ -180 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 160 \sin 25 \\ 0 \\ 160 \cos 25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -160 \sin 25 \\ 0 \\ -160 \cos 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +120 \\ -180 \\ -100 \end{vmatrix} \quad \boxed{2,5}$$

$$\vec{M}_A = \overline{AA} \wedge \vec{F}_A + \overline{AK} \wedge \vec{F}_K + \overline{AH} \wedge \vec{F}_H + \overline{AI} \wedge \vec{F}_I + \overline{AF} \wedge \vec{F}_F =$$

$$(\overline{AA} \wedge \vec{F}_A) = \vec{0} \quad \boxed{0,5}$$

$$\overline{AK} \wedge \vec{F}_K = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 250 \cdot 10^{-3} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \boxed{0,5}$$

$$\overline{AH} \wedge \vec{F}_H = \begin{vmatrix} 300 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \boxed{0,5}$$

$$\overline{AI} = \overline{AG} + \overline{GI} = \begin{vmatrix} 300 \cdot 10^{-3} \\ 200 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -100 \cdot 10^{-3} \cos 25 \\ 0 \\ 100 \cdot 10^{-3} \sin 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 300 \cdot 10^{-3} - 90,6 \cdot 10^{-3} \\ 200 \cdot 10^{-3} \\ 42,2 \cdot 10^{-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,2 \\ 0,2 \\ 0,04 \end{vmatrix} \quad \boxed{0,5}$$

$$\overline{AI} \wedge \vec{F}_I = \begin{vmatrix} 0,2 \\ 0,2 \\ 0,04 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 67,52 \\ 0 \\ 144,96 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 28,99 \\ -26,3 \\ -13,5 \end{vmatrix} \quad \boxed{0,5}$$

$$\overline{AF} = \overline{AG} + \overline{GF} = \begin{vmatrix} 300 \cdot 10^{-3} \\ 200 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 150 \cdot 10^{-3} \cos 25 \\ 0 \\ -150 \cdot 10^{-3} \sin 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,43 \\ 0,2 \\ -0,06 \end{vmatrix} \quad \boxed{0,5}$$

$$\overline{AF} \wedge \vec{F}_F = \begin{vmatrix} 0,43 \\ 0,2 \\ -0,06 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -67,52 \\ 0 \\ -144,96 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -28,99 \\ 66,38 \\ 13,5 \end{vmatrix} \quad \boxed{0,5}$$

$$\vec{M}_A + \vec{M}_K = \begin{vmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 28,99 \\ -26,3 \\ -13,5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -28,99 \\ 66,38 \\ 13,5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 100,08 \\ 50 \end{vmatrix} \quad \boxed{0,5}$$

$$\text{Finalement : } [T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \begin{vmatrix} +120 \\ -180 \\ -100 \end{vmatrix} \quad \boxed{0,5} \\ \vec{M}_A = \begin{vmatrix} 0 \\ 100,08 \\ 50 \end{vmatrix} \quad \boxed{0,5} \end{cases} \quad \boxed{0,5}$$

Exercice 03: (noté sur 8pts)

2^{ème} méthode :

L'ensemble est soumis à l'action de 5 torseurs appliqués en A, K, H, I et F

a) action en A

$$[T]_1 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_A \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -1800 & 0 \end{Bmatrix}_A \quad \mathbf{01}$$

$$\mathbf{b) action en K:} [T]_2 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_K \\ \vec{M}_K \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1200 \\ 0 & 0 \\ 0 & 50 \end{Bmatrix}_K = \begin{Bmatrix} 1200 \\ 0 & 30 \\ 0 & 50 \end{Bmatrix}_A \quad \mathbf{01}$$

$$\vec{M}_A(\vec{F}_K) = \vec{M}_K + A\vec{K} \wedge \vec{F}_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.25 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix} \quad \mathbf{0,5}$$

$$\mathbf{c) action en H:} [T]_3 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_H \\ \vec{M}_H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1000 \end{Bmatrix}_H = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 30 \\ -1000 \end{Bmatrix}_A \quad \mathbf{01}$$

$$\vec{M}_A(\vec{F}_H) = \vec{M}_H + A\vec{H} \wedge \vec{F}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{0,5}$$

$$\mathbf{d) action en I:} [T]_4 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_I \\ \vec{M}_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 160 \sin 25 & 0 \\ 0 & 0 \\ 160 \cos 25 & 0 \end{Bmatrix}_I = \begin{Bmatrix} 67,62 & 29 \\ 0 & -27,5 \\ 145,01 & -13,52 \end{Bmatrix}_A \quad \mathbf{01}$$

$$\vec{M}_A(\vec{F}_I) = \vec{M}_I + A\vec{I} \wedge \vec{F}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 - 0.1 \cos 25 \\ 0.2 \\ 0.1 \sin 25 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 160 \sin 25 \\ 0 \\ 160 \cos 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ -27.50 \\ -13.52 \end{pmatrix} \quad \mathbf{0,5}$$

$$\mathbf{e) action en F:} [T]_5 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_F \\ \vec{M}_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -160 \sin 25 & 0 \\ 0 & 0 \\ -160 \cos 25 & 0 \end{Bmatrix}_F = \begin{Bmatrix} -67,62 & -29 \\ 0 & 67,5 \\ -145,01 & 13,52 \end{Bmatrix}_A \quad \mathbf{01}$$

$$\vec{M}_A(\vec{F}_F) = \vec{M}_F + A\vec{F} \wedge \vec{F}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 + 0.15 \cos 25 \\ 0.2 \\ -0.15 \sin 25 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -160 \sin 25 \\ 0 \\ -160 \cos 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ 67.50 \\ 13.52 \end{pmatrix} \quad \mathbf{0,5}$$

01

$$[T]_A = [T]_1 + [T]_2 + [T]_3 + [T]_4 + [T]_5 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -1800 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1200 \\ 0 & 30 \\ 0 & 50 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 30 \\ -1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 67,62 & 29 \\ 0 & -27,5 \\ 145,01 & -13,52 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -67,62 & -29 \\ 0 & 67,5 \\ -145,01 & 13,52 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 120 & 0 \\ -180 & 100 \\ -100 & 50 \end{Bmatrix}$$