MECANIQUE RATIONNELLE 1 - CORRIGE DU DEVOIR SURVEILLE N°01

Exercice 01: *(noté sur 6pts)*

1. Les éléments de réduction du torseur $[T]_0$

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{0,5} \\ \vec{M}_O = \underbrace{\overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}_1 + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{V}_2 + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{V}_3}_{\boxed{0,5}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{01} \end{cases}$$

2. L'auto-moment : $A = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix}}_{\boxed{0,5}} = 0 - 2 - 3 = -5 \rightarrow \boxed{01}$

3. Le pas du torseur : $P = \underbrace{\frac{\vec{R}.\vec{M}_O}{R^2}}_{\boxed{0,5}} = \frac{A}{R^2} = \frac{-5}{10} = -0.5 \rightarrow \boxed{0,5}$

4. L'axe central: $\overrightarrow{OP} = \underbrace{\frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_0}{\vec{R}^2} + \alpha \vec{R}}_{\boxed{0,5}} = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{10} + \alpha \\ \frac{1}{10} + 3\alpha \end{vmatrix}}_{\boxed{01}} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{10} + \alpha \\ z = \frac{1}{10} + 3\alpha \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} x = 0.5 \\ z = 3y + 1 \end{cases}$ l'axe central est une droite dans le plan d'équation z=3y+1 situé à x=0.5

Exercice 02 : *(noté sur 6pts)*

1. Calculer le vecteur $\vec{U}_M$ au point O.

$$\begin{cases} U_x = (a + (1-b)x + by - bz) \\ U_y = (-2a - bx + (b-1)y + bz) \\ U_z = (a + bx - by + (1-b)z) \end{cases}$$

$$\vec{U}_O = \begin{vmatrix} a \\ -2a \\ a \end{vmatrix} \quad \boxed{0,5}$$

2. Anti-symétriser ce champ:

Le champ est antisymétrique si : $\vec{U}_M.\overrightarrow{OM} = \vec{U}_O.\overrightarrow{OM}$ $\boxed{0,5}$

$$\vec{U}_M.\overrightarrow{OM} = ax + x^2 - bx^2 + bxy - bxz - 2ay - bxy + by^2 - y^2 + byz + az + bxz - byz + z^2 - bz^2$$

$$\vec{U}_O.\overrightarrow{OM} = ax - 2ay + az$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 + z^2 = b\left(x^2 - y^2 + z^2\right) \Rightarrow b = 1 \quad \boxed{01}$$

Le champ est un torseur pour b=1 : $\begin{cases} U_x = a + y - z \\ U_y = -2a - x + z \\ U_z = a + x - y \end{cases}$

3. Les éléments de réduction au point O du torseur associé :

$$[T]_0 = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{U}_0 \end{cases}$$

$$x = y = z = 0 \Rightarrow \vec{U}_O = \begin{vmatrix} a \\ -2a \\ a \end{vmatrix} \quad \boxed{0{,}5}$$

Pour calculer la résultante, on applique la formule des transports des moments:

$$\vec{U}_M = \vec{U}_O + \overrightarrow{MO} \wedge \vec{R} \quad \boxed{0{,}5}$$

$$\begin{pmatrix} a + y - z \\ -2a - x + z \\ a + x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -2a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y - z + yR_z - zR_y = 0 \\ -x + z + zR_x - xR_z = 0 \\ x - y + xR_y - yR_x = 0 \end{cases}$$

Après, la résolution du système d'équations, on trouve : $R_x = -1; R_y = -1; R_z = -1$

Enfin, $[T]_0 = \begin{cases} \vec{R} = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad \boxed{01} \\ \vec{U}_O = \begin{vmatrix} a \\ -2a \\ a \end{vmatrix} \end{cases}$

4. a. La nature du torseur pour a=0 et a ≠ 0:

$$A = \vec{U}_O \bullet \vec{R} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \boxed{0{,}5}$$

C'est un torseur glisseur dans les deux cas.

$$A = \vec{U}_O \bullet \vec{R} = \begin{vmatrix} a \\ -2a \\ a \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \boxed{0{,}5}$$

4. b. L'axe central du torseur dans les deux cas :

Pour a=0 :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{U}_0}{R^2} + \alpha\vec{R} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \alpha \bullet \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} = \alpha \bullet \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

l'axe central est parallèle à la résultante. $\boxed{0{,}5}$

Pour a ≠ 0 :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{U}_0}{R^2} + \alpha\vec{R} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a \\ -2a \\ a \end{vmatrix} + \alpha \bullet \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -3a \\ 0 \\ 3a \end{vmatrix} + \alpha \bullet \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a - \alpha \\ -\alpha \\ a - \alpha \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -a - \alpha \\ y = -\alpha \\ z = a - \alpha \end{cases} \Rightarrow x + z - 2y = 0$$

$\boxed{0{,}5}$

Exercice 03: *(noté sur 8pts)*

1. Les éléments de réduction du torseur résultant au pt A :

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \sum \vec{F}_i \\ \overrightarrow{M}_A = \sum \overrightarrow{M}_i \end{cases}$$

$$\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_K + \vec{F}_H + \vec{F}_I + \vec{F}_F = \begin{vmatrix} 0 \\ -180 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 160\sin 25 \\ 0 \\ 160\cos 25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -160\sin 25 \\ 0 \\ -160\cos 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +120 \\ -180 \\ -100 \end{vmatrix} \quad \boxed{2{,}5}$$

$$\overrightarrow{M}_A = \overrightarrow{AA} \wedge \vec{F}_A + \overrightarrow{AK} \wedge \vec{F}_K + \overrightarrow{AH} \wedge \vec{F}_H + \overrightarrow{AI} \wedge \vec{F}_I + \overrightarrow{AF} \wedge \vec{F}_F =$$

$$(\overrightarrow{AA} \wedge \vec{F}_A) = \vec{0} \quad \boxed{0{,}5}$$

$$\overrightarrow{AK} \wedge \vec{F}_K = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 250.10^{-3} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \boxed{0{,}5}$$

$$\overrightarrow{AH} \wedge \vec{F}_H = \begin{vmatrix} 300.10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \boxed{0{,}5}$$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GI} = \begin{vmatrix} 300.10^{-3} \\ 200.10^{-3} \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -100.10^{-3}\cos 25 \\ 0 \\ 100.10^{-3}\sin 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 300.10^{-3} - 90{,}6.10^{-3} \\ 200.10^{-3} \\ 42{,}2.10^{-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0{,}04 \end{vmatrix} \quad \boxed{0{,}5}$$

$$\overrightarrow{AI} \wedge \vec{F}_I = \begin{vmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0{,}04 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 67.52 \\ 0 \\ 144.96 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 28{,}99 \\ -26{,}3 \\ -13{,}5 \end{vmatrix} \quad \boxed{0{,}5}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GF} = \begin{vmatrix} 300.10^{-3} \\ 200.10^{-3} \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 150.10^{-3}\cos 25 \\ 0 \\ -150.10^{-3}\sin 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}43 \\ 0{,}2 \\ -0{,}06 \end{vmatrix} \quad \boxed{0{,}5}$$

$$\overrightarrow{AF} \wedge \vec{F}_F = \begin{vmatrix} 0{,}43 \\ 0{,}2 \\ -0{,}06 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -67{,}52 \\ 0 \\ -144{,}96 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -28{,}99 \\ 66{,}38 \\ 13{,}5 \end{vmatrix} \quad \boxed{0{,}5}$$

$$\overrightarrow{M}_A + \overrightarrow{M}_K = \begin{vmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 28{,}99 \\ -26{,}3 \\ -13{,}5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -28{,}99 \\ 66{,}38 \\ 13{,}5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 100{,}08 \\ 50 \end{vmatrix} \quad \boxed{0{,}5}$$

$\boxed{0{,}5}$

$$Finalement : [T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \begin{vmatrix} +120 \\ -180 \\ -100 \end{vmatrix} \quad \boxed{0{,}5} \\ \vec{M}_A = \begin{vmatrix} 0 \\ 100{,}08 \\ 50 \end{vmatrix} \quad \boxed{0{,}5} \end{cases}$$

Exercice 03: *(noté sur 8pts)*

2ième méthode :

L'ensemble est soumis à l'action de 5 torseurs appliqués en A, K, H, I et F

a) action en A

$$[T]_1 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_A \\ \overrightarrow{M}_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -180 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$$ **01**

b) action en K : $$[T]_2 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_K \\ \overrightarrow{M}_K \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 50 \end{Bmatrix}_K = \begin{Bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 30 \\ 0 & 50 \end{Bmatrix}_A$$ **01**

$$\vec{M}_A\left(\vec{F}_K\right) = \vec{M}_K + A\vec{K} \wedge \vec{F}_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.25 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}$$ **0,5**

c) action en H : $$[T]_3 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_H \\ \overrightarrow{M}_H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -100 & 0 \end{Bmatrix}_H = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 30 \\ -100 & 0 \end{Bmatrix}_A$$ **01**

$$\vec{M}_A\left(\vec{F}_H\right) = \vec{M}_H + A\vec{H} \wedge \vec{F}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$$ **0,5**

d) action en I : $$[T]_4 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_I \\ \overrightarrow{M}_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 160\sin 25 & 0 \\ 0 & 0 \\ 160\cos 25 & 0 \end{Bmatrix}_I = \begin{Bmatrix} 67,62 & 29 \\ 0 & -27,5 \\ 145,01 & -13,52 \end{Bmatrix}_A$$ **01**

$$\vec{M}_A\left(\vec{F}_I\right) = \vec{M}_I + A\vec{I} \wedge \vec{F}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3\text{-}0.1\cos 25 \\ 0.2 \\ 0.1\sin 25 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 160\sin 25 \\ 0 \\ 160\cos 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ -27.50 \\ -13.52 \end{pmatrix}$$ **0,5**

e) action en F : $$[T]_5 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_F \\ \overrightarrow{M}_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -160\sin 25 & 0 \\ 0 & 0 \\ -160\cos 25 & 0 \end{Bmatrix}_F = \begin{Bmatrix} -67,62 & -29 \\ 0 & 67,5 \\ -145,01 & 13,52 \end{Bmatrix}_A$$ **01**

$$\vec{M}_A\left(\vec{F}_F\right) = \vec{M}_F + A\vec{F} \wedge \vec{F}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 + 0.15\cos 25 \\ 0.2 \\ \text{-}0.15\sin 25 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \text{-}160\sin 25 \\ 0 \\ -160\cos 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ 67.50 \\ 13.52 \end{pmatrix}$$ **0,5**

01

$$[T]_A = [T]_1 + [T]_2 + [T]_3 + [T]_4 + [T]_5 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -180 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 30 \\ 0 & 50 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 30 \\ -100 & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 67,62 & 29 \\ 0 & -27,5 \\ 145,01 & -13,52 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -67,62 & -29 \\ 0 & 67,5 \\ -145,01 & 13,52 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 120 & 0 \\ -180 & 100 \\ -100 & 50 \end{Bmatrix}$$